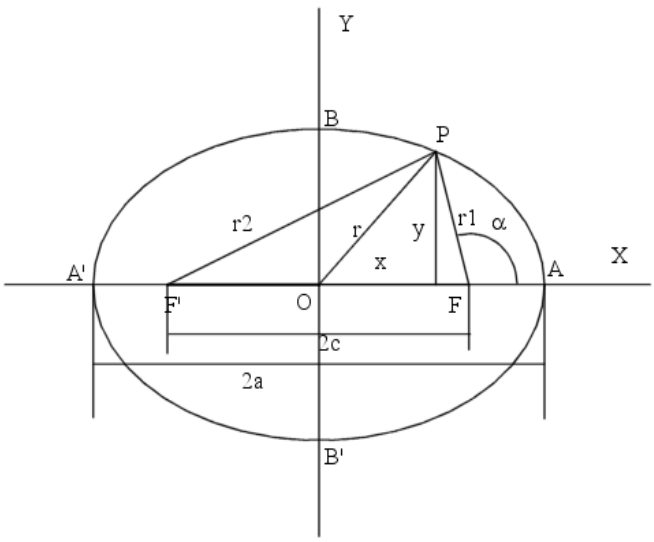
Geodesia Matemática.

1.- GEOMETRÍA DE LA ELIPSE.

GEOMETRÍA DE LA ELIPSE.

1.- Ecuaciones de la elipse.

1.1 Ecuación polar con el polo en un foco de la elipse.



Elipse en coordenadas polares

Sea O el centro de simetría de la elipse. Origen del sistema cartesiano cuyos ejes son los ejes de la elipse.

a longitud OA del semieje mayor

b longitud OB del semieje menor

F y F´ los focos.

P (x, y) un punto genérico de la elipse.

r_1 distancia PF

r_2 distancia PF'.

Se verifica $\quad r_1 + r_2 = 2a$

$$r_2 - r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2^2 - r_1^2 = (x+c)^2 - (x-c)^2 = 4cx \qquad r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = (r_2 - r_1)2a = 4cx$$

$$r_2 - r_1 = 2\frac{c}{a}x \qquad r_2 = \frac{c}{a}x + a \qquad r_1 = a - \frac{c}{a}x$$

Si consideramos el foco F como polo, y el eje OA como eje polar:

$$r_1 \cos\alpha = x - c \qquad \frac{c}{a} r_1 \cos\alpha = \frac{c}{a}x - \frac{c^2}{a} - a + a = -(a - \frac{c}{a}x) + a - \frac{c^2}{a}$$

$$r_1\left(1 + \frac{c}{a}\cos\alpha\right) = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} \qquad \text{Llamando } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \text{ y } p = \frac{b^2}{a}$$

$r_1 = r$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\alpha}} \qquad (1.1)$$

***1.2 Ecuación cartesiana de la elipse*.**

Teniendo en cuenta que $r_1 = a - \frac{c}{a}x$ y por otra parte $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$, eliminando r_1 resulta $(a - \frac{c}{a}x)^2 = (x-c)^2 + y^2$, tras algunas operaciones se llega

$$a^2 - c^2 = (1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 \quad \text{como } b^2 = a^2 - c^2 \text{ entonces } b^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (1.2)$$

***2 Afinidad entre la elipse y su circunferencia principal*.**

Consideremos la circunferencia de centro el origen y radio a

$$x^2 + y^2 = a^2$$

esta circunferencia se denomina circunferencia principal de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Si consideramos la transformación afín

$$\begin{aligned} x^* &= x \\ y^* &= \frac{b}{a}y \end{aligned} \tag{1.3}$$

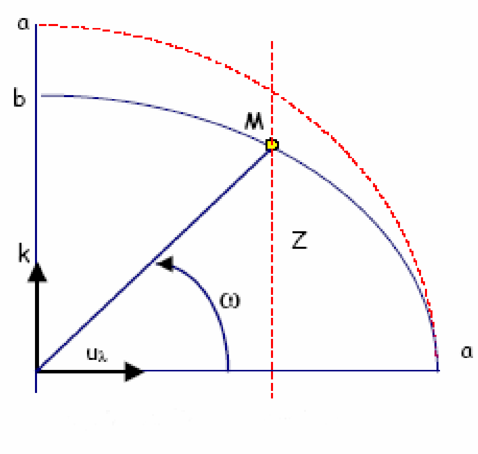
Si el punto (x,y) pertenece a la circunferencia principal, entonces el punto (x^*, y^*) pertenece a la elipse.

En la circunferencia $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$

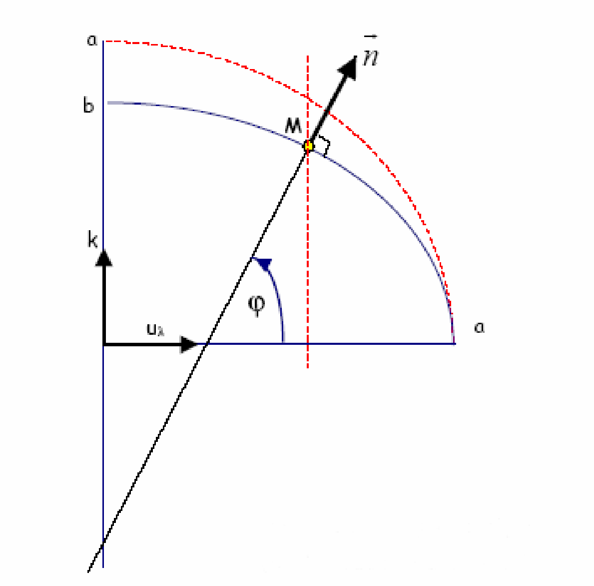
En la elipse $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

3.- La elipse meridiana.

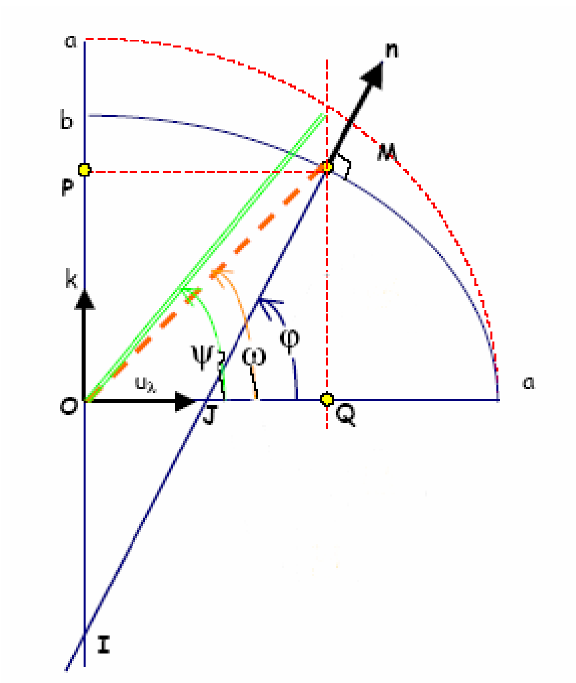
Latitudes:



Latitud geocéntrica ω



Latitud geodésica φ



Latitud reducida ψ .

3.1 Ecuaciones paramétricas de la elipse usando la latitud reducida.

Circunferencia principal $\quad x = a.\cos\psi \quad y = a.sen\psi$

Elipse (latitud reducida) $x = a.\cos\psi \quad y = b.sen\psi$ (1.4)

3.2 Relación entre la latitud geocéntrica y la reducida.

De las identidades $y = r.sen\omega = b.sen\psi$, $x = r.\cos\omega = a.\cos\psi$, resulta

$$\boxed{\tan\omega = \frac{b}{a}\tan\psi} \tag{1.5}$$

3.3 Vector tangente a la elipse en el punto M.

$$\frac{dx}{d\psi} = -a.sen\psi \ , \ \frac{dy}{d\psi} = b.\cos\psi \qquad (-a.sen\psi, b.\cos\psi) \tag{1.6}$$

3.4 Vector normal a la elipse en el punto M

$$(b.\cos\psi, a.sen\psi) \tag{1.7}$$

3.5 Relación entre la latitud geodésica y la reducida

Teniendo en cuenta que $\tan\varphi$ es el coeficiente angular de la normal.

$$\tan\varphi = \frac{a}{b}\tan\psi$$

$$\boxed{\tan\psi = \frac{b}{a}\tan\varphi} \tag{1.8}$$

3.6 Coordenadas del punto I (Corte de la normal a la elipse con el eje OY)

Si M (x_0, y_0), la recta normal por M tiene de ecuación

$$y = y_0 + \tan\varphi(x - x_0) = y_0 + \frac{a}{b}\tan\psi(x - x_0),$$

la intesección con $x = 0$, es

$$(0, y_0 - x_0\tan\varphi) = (0, y_0 - x_0\frac{a}{b}\tan\psi) \tag{1.9}$$

3.7 Gran normal.

Se denomina gran normal al segmento MI, se representa por N

$$N = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - (y_0 - x_0 \tan\varphi)^2} = x_0 \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \tan\psi^2}$$

$$N = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 \cos^2\psi + a^2 sen^2\psi} \qquad (1.10)$$

En función de la latitud geodésica φ

$$\cos^2\psi = \frac{1}{1+\tan^2\psi} = \frac{b^2}{a^2 + b^2\tan^2\varphi} \qquad sen^2\psi = \frac{\tan^2\psi}{1+\tan^2\psi} = \frac{b^2\tan^2\varphi}{a^2 + b^2\tan^2\varphi}$$

$$b^2\cos^2\psi + a^2 sen^2\psi = \frac{a^2b^2\left(1+\tan^2\varphi\right)}{a^2 + b^2\tan^2\varphi} = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi}$$

$$N = \frac{a}{b}\sqrt{b^2\cos^2\psi + a^2 sen^2\psi} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi}} \qquad (1.11)$$

3.8 Curvatura de la elipse en un punto

La curvatura C en un punto de la elipse se define por

$$C = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Sustituyendo

$$\begin{array}{lll} x = a\cos\psi & x' = -a.sen\psi & x'' = -a\cos\psi \\ y = b.sen\psi & y' = b\cos\psi & y'' = -b.sen\psi \end{array}$$

Resulta

$$C = \frac{ab}{\left(a^2 sen^2\psi + b^2\cos^2\psi\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (1.12)$$

El radio de curvatura, radio de la circunferencia que tiene en el punto la misma curvatura, R es

$$R = \frac{1}{C}$$

R es el radio de circulo osculador.