Geodesia Matemática.

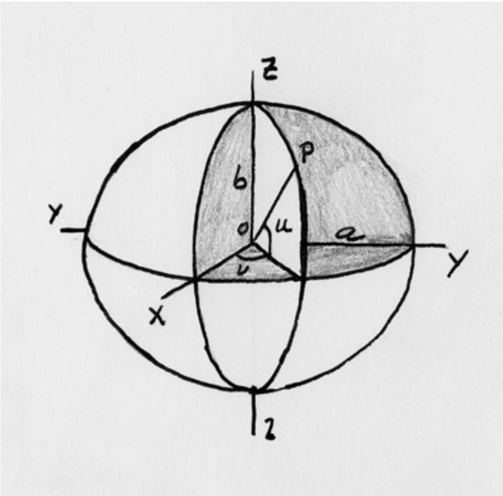
E. Calero
Versión 1.0
31-01-2005
Madrid
Parte II
Geometría del elipsoide de revolución
II-1

2.- GEOMETRÍA DEL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN.

2.- GEOMETRÍA DEL ELIPSOIDE DE REVOLUCIÓN.

ECUACIONES

Superficie engendrada al girar una elipse situada en el plano OZY alrededor del eje OZ.



2.1 Ecuaciones paramétricas:

X = OP = (a cos u cos v, a cos u sen v, b sen u)

$$x = a \cos u \cos v$$
$$y = a \cos u \operatorname{sen} v \qquad (2.1)$$
$$z = b \operatorname{sen} u$$

u, v son parámetros independientes

a semieje mayor
b semieje menor

Una relación funcional f(u, v) = 0 determina una curva sobre la superficie.

Así $f(u, v) \equiv u - u_0 = 0$ representa, junto con las ecuaciones paramétricas. la circunferencia determinada por la intersección del elipsoide con el plano $z = b \operatorname{sen} u_0$, un paralelo.

$f(u, v) \equiv v - v_0 = 0$ representa, junto con las ecuaciones paramétricas, una elipse determinada por la intersección del elipsoide con el plano $y - \tan v_0\, x = 0$. El eje OZ es un eje de simetría de esta elipse.

2.2 Ecuación cartesiana.

Eliminando los parámetros u y v, resulta la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (2.2)$$

Se define el *achatamiento* por $f = (a - b)/a$, $\Rightarrow b/a = 1 - f$, $\quad b = (1 - f)\, a$ (2.3)

El cuadrado de la *excentricidad* $e^2 = (a^2 - b^2)/ a^2 \quad \Rightarrow \quad e^2 = 2f - f^2$ (2.4)

El cuadrado de la *segunda excentricidad* $e'^2 = (a^2 - b^2)/ b^2 \quad \Rightarrow \quad e^2 = (1 - f)^2 e'^2$ (2.5)

CURVAS CONTENIDAS EN UNA SUPERFICIE (ELIPSOIDE)

2.3 Vector tangente a una curva sobre el elipsoide.

Si $f(u, v) = 0$ define una curva sobre el elipsoide, sea X el vector de posición de un punto P de esta curva, un vector en la dirección de la tangente a la curva en el punto P, dX, es

$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_u\, du + \mathbf{X}_v\, dv \qquad f_u\, du + f_v\, dv = 0 \qquad \mathbf{X} = (x, y, z)\ , \tag{2.6}$$

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 + z^2/b^2 = 1$$

2.4 Longitud de un arco elemental de curva ds

$$ds^2 = d\mathbf{X}.d\mathbf{X} = (\mathbf{X}_u\, du + \mathbf{X}_v\, dv).(\ \mathbf{X}_u\, du + \mathbf{X}_v\, dv)$$

$$ds^2 = (\mathbf{X}_u.\mathbf{X}_u)\, du^2 + 2\ (\mathbf{X}_u.\mathbf{X}_v)\, dudv + (\mathbf{X}_{v..}\mathbf{X}_v)\, dv^2$$

$$ds^2 = E\, du^2 + 2\ F\, dudv + G\, dv^2 \tag{2.7}$$

Esta expresión se denomina ***Primera Forma Cuadrática Fundamental*** de la superficie y define una métrica sobre ella.

En el caso de la representación paramétrica (2.1), resulta

$$\mathbf{X}_u = (\ \text{-a sen u cos v, -a sen u sen v, b cos u})$$

$$\mathbf{X}_v = (\ \text{-a cos u sen v, a cos u cos v, 0})$$

$$E = (\mathbf{X}_u \boldsymbol{.} \mathbf{X}_u) = a^2\, \text{sen}^2\, u + b^2 \cos^2 u$$

$$F = (\mathbf{X}_u \boldsymbol{.} \mathbf{X}_v) = 0$$

$$G = (\mathbf{X}_v \boldsymbol{.} \mathbf{X}_v) = a^2 \cos^2 u$$

$$ds^2 = (a^2\, \text{sen}^2\, u + b^2 \cos^2 u)\, du^2 + a^2 \cos^2 u\, dv^2 \tag{2.8}$$

2.5 Longitud de un arco de curva entre dos puntos

$$s = \int \left(E\, du^2 + 2\ F\, dudv + G\, dv^2\right)^{1/2} \qquad \text{con}$$

$$f_u\, du + f_v\, dv = 0, \quad f(u_0, v_0) = 0, \quad f(u_1, v_1) = 0$$

2.6 Vector unitario tangente a una curva.

Cuando el parámetro que define la curva es la longitud del arco s, $u = u(s)$ $v = v(s)$, de la identidad

$$ds^2 = d\mathbf{X}\boldsymbol{.}d\mathbf{X} \quad \text{resulta} \quad \mathbf{(}d\mathbf{X}/ds) \ \boldsymbol{.}\ \mathbf{(}d\mathbf{X}/ds) = 1, \qquad \mathbf{t.t} = 1 \tag{2.9}$$

llamando **t** = d**X**/ds , el vector tangente es un vector unitario cuando el parámetro que define la curva es la longitud del arco.

2.7 Curvatura de una curva contenida en la superficie.

El vector curvatura **k** se define por

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{t}' \qquad (2.10)$$

de la identidad $\mathbf{t}.\mathbf{t} = 1$, sigue $\mathbf{t}.\mathbf{t}' + \mathbf{t}'.\mathbf{t} = 0$, $\mathbf{t}.\mathbf{t}' = 0$, $\mathbf{t}.\mathbf{k} = 0$

Los vectores tangente **t** y curvatura **k** son perpendiculares. El vector **k** está contenido en un plano perpendicular a **t**.

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g \qquad (2.11)$$

$\mathbf{k}_n$ se denomina ***curvatura normal*** y es la proyección del vector **k** sobre la normal a la superficie.

$\mathbf{k}_g$ se denomina ***curvatura geodésica*** y es la proyección del vector **k** sobre el plano tangente a superficie.

NORMALES

2.8 Dirección de la normal a la superficie en un punto.

Los vectores $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_v$ están contenidos en el plano tangente al elipsoide. Sí los parámetros u y v son independientes, entonces $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq 0$. En este caso, el producto vectorial $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ define la dirección de la normal a la superficie en el punto (u, v).

El vector unitario normal

$$n_s = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)/|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|$$

Sí consideramos la ecuación cartesiana f(x, y, z) = 0, la ecuación del plano tangente en un punto (x0, y0, z0) es

$$f_x\,(x - x_0) + f_y\,(y - y_0) + f_z\,(z - z_0) = 0 \qquad (2.12)$$

Un vector en la dirección de la normal es: (f_x, f_y, f_z).

En el caso del elipsoide de revolución, aplicándolo a la ecuación, resulta

$$f_x = 2x/a^2 \qquad f_y = 2y/a^2 \qquad f_z = 2z/b^2$$

Las ecuaciones de la recta normal al elipsoide de revolución en un punto (x_0, y_0, z_0) son

$$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/a^2} = \frac{z - z_0}{z_0/b^2} \qquad (2.13)$$

***2.9 Posición relativa de las normales en dos puntos del elipsoide de revolución*.**

Sea las ecuaciones de las normales

$$\frac{x - x_0}{x_0/a^2} = \frac{y - y_0}{y_0/a^2} = \frac{z - z_0}{z_0/b^2}$$

$$\frac{x - x_1}{x_1/a^2} = \frac{y - y_1}{y_1/a^2} = \frac{z - z_1}{z_1/b^2}$$

en los puntos P (x_0, y_0, z_0) y Q (x_1, y_1, z_1)

La posición relativa depende del valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x_0/a^2 & y_0/a^2 & z_0/b^2 \\ x_1/a^2 & y_1/a^2 & z_1/b^2 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = (z_1 - z_0)\,(x_0y_1 - y_0x_1)(1 - a^2/b^2)/a^4$$

que será distinto de cero siempre que lo sean los factores $(z_1 - z_0)\,(x_0y_1 - y_0x_1)$.

En general, las normales al elipsoide de revolución en dos puntos P y Q son rectas que se **cruzan.**

Sí $z_1 - z_0 = 0$, los dos puntos están situados en el mismo paralelo.

Sí $x_0y_1 - y_0x_1 = 0$, $x_0/x_1 = y_0/y_1$, los dos puntos están situados en un plano que contiene al eje OZ, es decir, sobre un mismo meridiano.

Las normales en dos puntos diferentes del elipsoide de revolución son rectas que, en general, se cruzan salvo que los puntos estén situados en un mismo meridiano o en un mismo paralelo.

En el caso de la esfera, a = b, y el determinante es idénticamente nulo. En la esfera todas las normales se cortan en un punto, el centro de la esfera.

***2.10 Intersección de la normal al elipsoide con el eje OZ*.**

Es la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{x_0/a^2} = \dfrac{y - y_0}{y_0/a^2} = \dfrac{z - z_0}{z_0/b^2} \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (2.14)$$

$$z - z_0 = -z_0\, a^2 / b^2$$

$$z = z_0\, (1 - a^2 / b^2) = -z_0\, e'^2$$

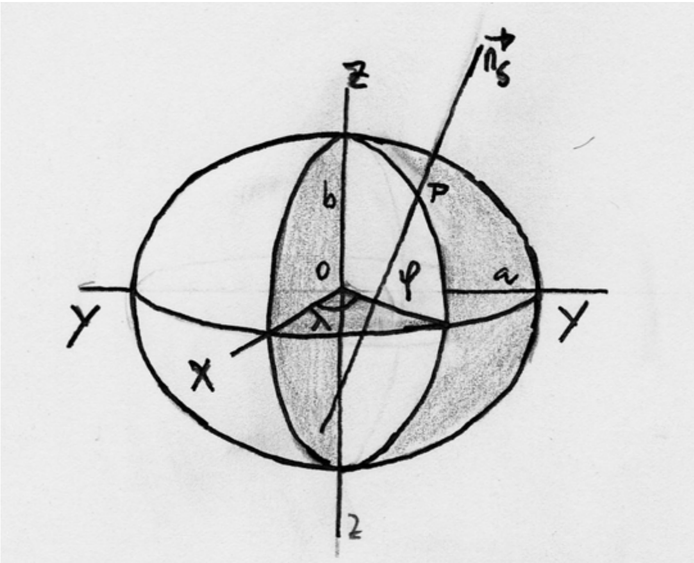
2.11 Secciones normales recíprocas.

Dados dos puntos P y Q del elipsoide de revolución. El plano determinado por la normal en P y el punto Q, corta al elipsoide según una curva que se denomina sección normal, PQ. Siendo P el punto que define la normal y Q el otro extremo. Análogamente la sección normal QP es otra curva, en general, diferente ya que las normales son rectas que cruzan.

El camino de P a Q según la sección normal con origen en P, es diferente del camino de Q a P según la sección normal con origen en Q, salvo que P y Q estén en el mismo meridiano o en el mismo paralelo.

Las secciones normales PQ y QP se denominan *secciones normales recíprocas*.

2.12 Coordenadas geodésicas.



Tomando como nuevos parámetros:

El ángulo ϕ que forma la normal por el punto P con el plano XOY.

El ángulo diedro λ que forma el plano POZ con el plano XOZ tomado en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Sea N la distancia entre el punto P y el punto de corte de la normal que pasa por P y el eje OZ. Esta distancia se denomina *gran normal*.

Si P' es la proyección del punto P del elipsoide sobre el plano XOY, entonces

$OP' = N \cos\phi \qquad x = N \cos\phi \cos\lambda \qquad y = N \cos\phi \operatorname{sen}\lambda$
$z = N \operatorname{sen}\phi - z\, e'^2$
$z\,(1 + e'^2) = N \operatorname{sen}\phi, \quad z = N\,(1 - e^2) \operatorname{sen}\phi$

Sustituyendo x, y, z en la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

$N^2\,(\cos^2\phi / a^2 + (1 - e^2)^2 \operatorname{sen}^2\phi / b^2) = 1$

$N^2\,(\cos^2\phi + (1 - e^2)^2 \operatorname{sen}^2\phi\, a^2/ b^2) = a^2 , \qquad a^2 / b^2 = (1 - e^2)^{-1}$

$N^2\,(\cos^2\phi + (1 - e^2) \operatorname{sen}^2\phi) = a^2, \qquad N^2\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi) = a^2$

$N = a\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{-1/2}$

Las ecuaciones paramétricas del elipsoide de revolución, utilizando las coordenadas geodésicas, ϕ y λ, son

$$\begin{aligned} x &= N \cos\phi \cos\lambda &&= a \cos\phi \cos\lambda\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{-1/2} \\ y &= N \cos\phi \operatorname{sen}\lambda &&= a \cos\phi \operatorname{sen}\lambda\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{-1/2} \\ z &= N\,(1 - e^2) \operatorname{sen}\phi &&= a\,(1 - e^2) \operatorname{sen}\phi\,(1 - e^2 \operatorname{sen}^2\phi)^{-1/2} \end{aligned} \qquad (2.15)$$

2.13 Vector unitario de la dirección de la normal en un punto P en coordenadas geodésicas.

Resulta

$(x/a^2\ ,\ y/a^2\ , z/b^2) = (N \cos\phi \cos\lambda / a^2 , N \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\lambda / a^2\ ,\ N (1 - e^2)\,\mathrm{sen}\,\phi /b^2\ ) =$

$N / a^2 (\cos\phi \cos\lambda\ , \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\lambda\ ,\ \mathrm{sen}\,\phi)$

$$n_S = (\cos\phi \cos\lambda\ , \cos\phi\,\mathrm{sen}\,\lambda\ ,\ \mathrm{sen}\,\phi) \qquad (2.16)$$

2.14 Primera forma cuadrática fundamental del elipsoide de revolución en coordenadas geodésicas.

Al considerar como parámetros ϕ y λ, la expresión toma la forma

$$ds^2 = E\, d\phi^2 + 2\, F\, d\phi d\lambda + G\, d\lambda^2$$

$$E = (\mathbf{X}\phi \mathbf{.} \mathbf{X}\phi) \qquad F = (\mathbf{X}\phi \mathbf{.} \mathbf{X}_\lambda) \qquad G = (\mathbf{X}_\lambda \mathbf{.} \mathbf{X}_\lambda)$$

$\mathbf{X}\phi = (N_\phi \cos\phi \cos\lambda - N\,\mathrm{sen}\phi \cos\lambda, N_\phi \cos\phi\,\mathrm{sen}\lambda - N\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\lambda, (1\text{-}e^2)(N_\phi\,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi))$

$\mathbf{X}_\lambda = (-N \cos\phi\,\mathrm{sen}\lambda\ , N \cos\phi \cos\lambda\ , 0)$

$E = (N_\phi \cos\phi \cos\lambda - N\,\mathrm{sen}\phi \cos\lambda\ )^2 + (N_\phi \cos\phi\,\mathrm{sen}\lambda - N\,\mathrm{sen}\phi\,\mathrm{sen}\lambda)^2 + (1\text{-}e^2)^2(N_\phi\,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi\ )^2 = (N_\phi \cos\phi - N\,\mathrm{sen}\phi\ )^2 + (1\text{-}e^2)^2 (N_\phi\,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi\ )^2$

$N_\phi \cos\phi - N\,\mathrm{sen}\phi = a\,\mathrm{sen}\phi\,(e^2 -1)(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{-3/2}$

$N_\phi\,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi = a \cos\phi\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{-3/2}$

$E = a^2\,(1\text{-}e^2)^2\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{-3}$

$F = 0$

$G = N^2 \cos^2\phi = a^2 \cos^2\phi\,(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^{-1}$

$$ds^2 = \frac{a^2\,(1\text{-}e^2)^2}{(1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi)^3}\, d\phi^2 + \frac{a^2 \cos^2\phi}{1 - e^2\,\mathrm{sen}^2\phi}\, d\lambda^2 \qquad (2.17)$$

2.15 Curvatura normal en función de las coordenadas geodésicas (ϕ, λ)

Teniendo en cuenta 2.11 y multiplicando escalarmente por $\mathbf{n}_S$, vector unitario normal a la superficie, resulta:

$$k_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_S \qquad (2.18)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{t}' = \mathbf{X}'' = \mathbf{X}_{\phi\phi}\, (\phi')^2 + 2\, \mathbf{X}_{\phi\lambda}\, \phi'\, \lambda' + \mathbf{X}_{\lambda\lambda}\, (\lambda')^2 + \mathbf{X}_{\phi}\, \phi'' + \mathbf{X}_{\lambda}\, \lambda''$$

Representando por ' la derivación respecto al arco ds y por los subíndices ϕ, λ las derivadas parciales respecto a los parámetros geodésicos.

Como $\mathbf{X}_{\phi} \cdot \mathbf{n}_S = 0$ y $\mathbf{X}_{\lambda} \cdot \mathbf{n}_S = 0$, se puede escribir

$$\mathbf{X}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\phi = 0$$

$$\mathbf{X}_{\phi\lambda} \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda = 0$$

$$\mathbf{X}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{X}_{\lambda} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda = 0$$

$$k_n = (\mathbf{X}_{\phi\phi} \cdot \mathbf{n}_S)\, (\phi')^2 + 2\, (\mathbf{X}_{\phi\lambda} \cdot \mathbf{n}_S)\, \phi'\, \lambda' + (\mathbf{X}_{\lambda\lambda} \cdot \mathbf{n}_S)\, (\lambda')^2 + (\mathbf{X}_{\phi} \cdot \mathbf{n}_S)\, \phi'' + (\mathbf{X}_{\lambda} \cdot \mathbf{n}_S)\, \lambda''$$

$$k_n = -\frac{(\mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\phi)\, (d\phi)^2 + 2\, (\mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda)\, d\phi\, d\lambda + (\mathbf{X}_{\lambda} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda)\, (d\lambda)^2}{ds^2} \qquad (2.19)$$

Como $\mathbf{n}_S = (\cos\phi \cos\lambda\ ,\ \cos\phi\, \text{sen}\, \lambda\ ,\ \text{sen}\, \phi)$

$$d\mathbf{n}_S/d\phi = (-\text{sen}\, \phi \cos\lambda\ ,\ -\text{sen}\, \phi\, \text{sen}\, \lambda\ ,\ \cos\phi)$$

$$d\mathbf{n}_S/d\lambda = (-\cos\phi\, \text{sen}\, \lambda\ ,\ \cos\phi \cos\lambda\ ,\ 0)$$

$\mathbf{X}\phi = (N_{\phi} \cos\phi \cos\lambda - N\, \text{sen}\phi \cos\lambda,\ N_{\phi} \cos\phi\, \text{sen}\lambda - N\, \text{sen}\phi\, \text{sen}\lambda,\ (1-e^2)(N_{\phi}\, \text{sen}\phi + N \cos\phi))$

$$\mathbf{X}_{\lambda} = (-N \cos\phi\, \text{sen}\lambda\ ,\ N \cos\phi \cos\lambda\ ,\ 0)$$

$$\mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\phi = a\, (1-e^2)\, (1 - e^2\, \text{sen}^2\phi)^{-3/2} = \rho$$

$$\mathbf{X}_{\phi} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda = 0$$

$$\mathbf{X}_{\lambda} \cdot d\mathbf{n}_S/d\lambda = N \cos^2\phi = a \cos^2\phi\, (1 - e^2\, \text{sen}^2\phi)^{-1/2}$$

Eligiendo adecuadamente el sentido de los vectores $\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_S$ puede cambiarse el signo del cociente, y la expresión de la curvatura normal del elipsoide de revolución toma la forma

$$k_n = \frac{\rho\ (d\phi)^2 + N \cos^2\phi\ (d\lambda)^2}{\rho^2\ (d\phi)^2 + N^2 \cos^2\phi\ (d\lambda)^2} = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} \qquad (2.20)$$

La expresión II se denomina segunda forma cuadrática fundamental del elipsoide de revolución.

Como el meridiano es la curva $d\lambda = 0$, el valor de la curvatura normal según el meridiano es

$k_{n(meridiano)} = \dfrac{1}{\rho}$ radio de curvatura normal(meridiano) $\rho = a\ (1\text{-}e^2)\ (1 - e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^{-3/2}$

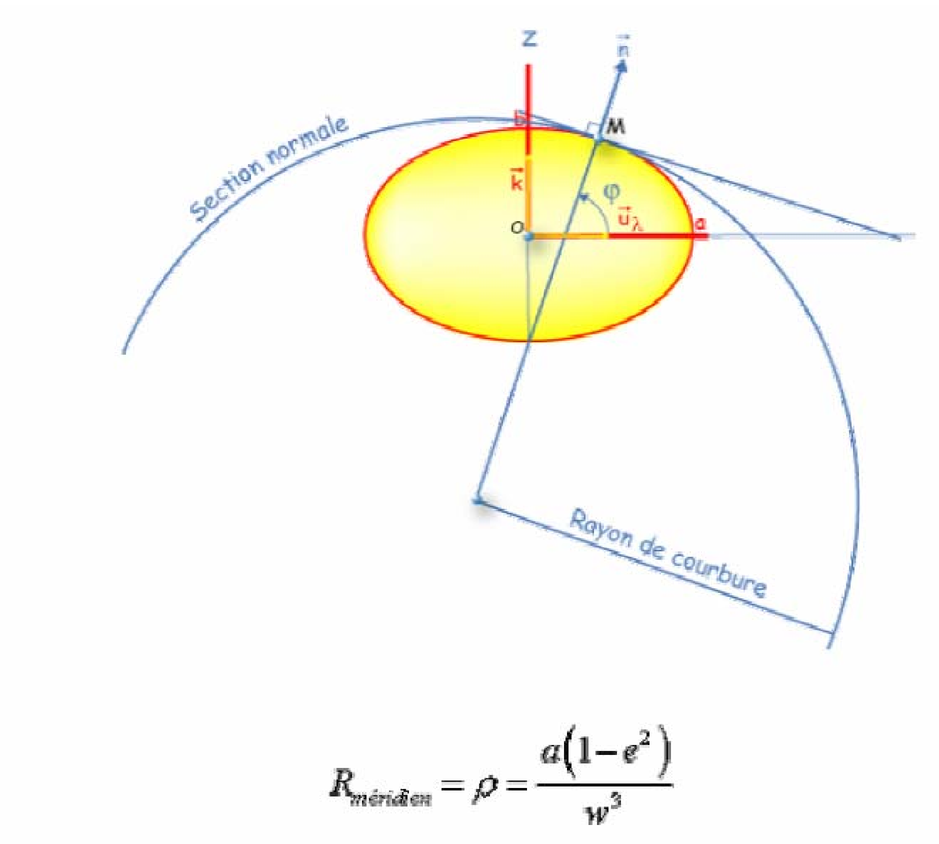


Imagen IGN Francia.

En la dirección perpendicular al meridiano, primer vertical, $d\phi = 0$,

$k_{n(primer\ vert)} = \dfrac{1}{N}$ radio de curvatura normal(primer vertical) $N = a\ (1 - e^2\ \mathrm{sen}^2\phi)^{-1/2}$

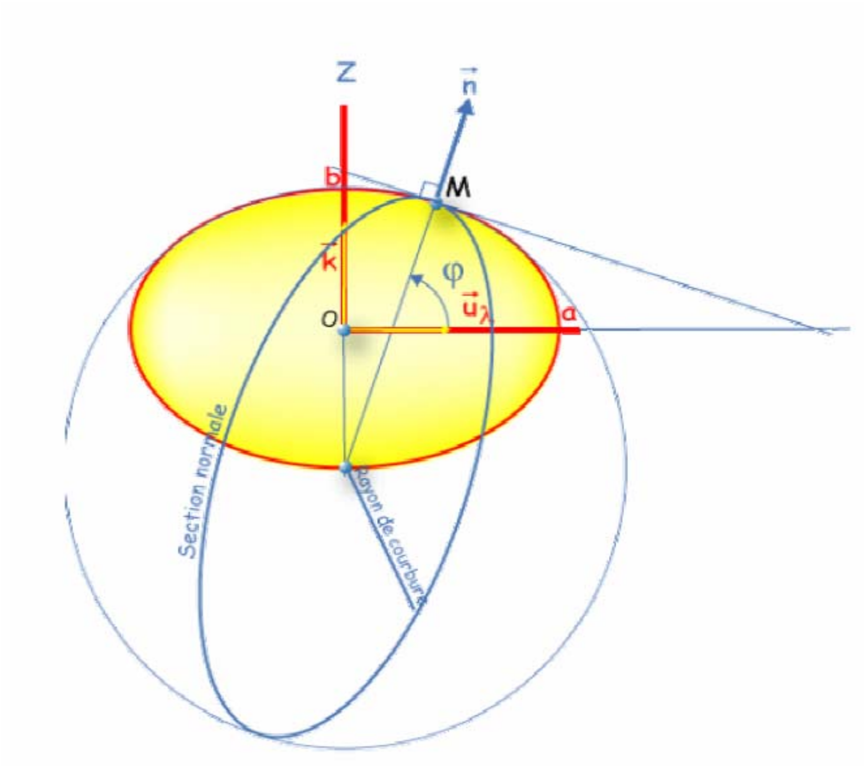


Imagen IGN Francia.

El radio de curvatura normal en un punto en la dirección del primer vertical coincide con la gran normal, pero no con el radio del paralelo del elipsoide que vale N cos ϕ.

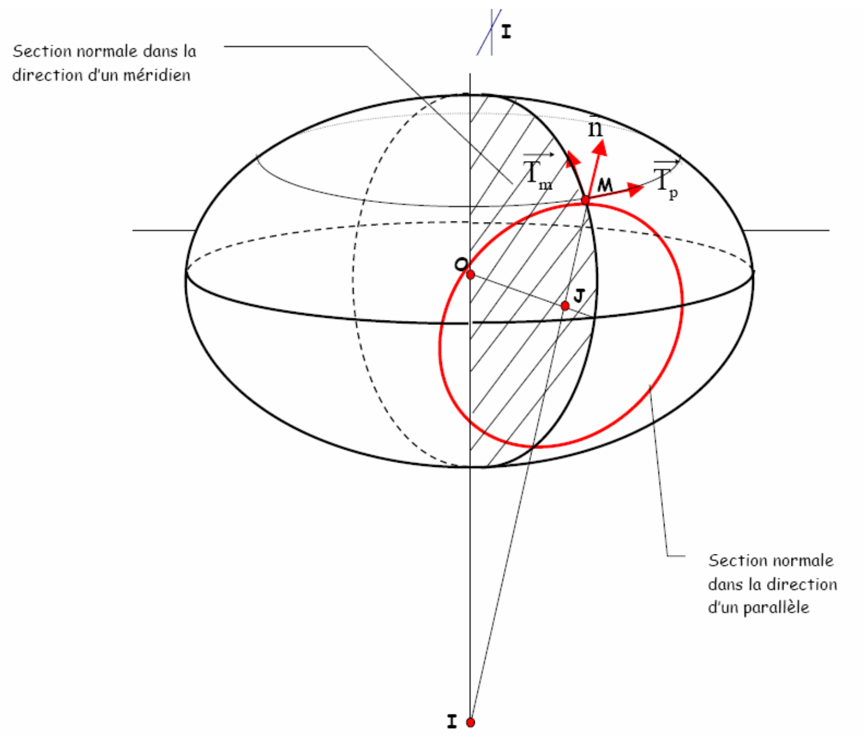


Imagen IGN Francia.

El radio de curvatura normal en una dirección de acimut A (origen norte) es

$$\frac{1}{R_A} = \frac{1}{\rho}\cos^2 A + \frac{1}{N} sen^2 A \qquad (2.21)$$

Tras algunos cálculos se llega a,

$$R_A = \frac{N}{1 + e'^2 \cos^2\varphi \cos^2 A} \qquad (2.22)$$

***2.16 Teorema de Meusnier**.*

De 2.20 se deduce que para todas las curvas que pasen por el punto donde se calcula k_n que tengan la tangente común ($d\phi$, $d\lambda$), k_n es constante. Se puede escribir

$$k_1 \cos\alpha_1 = k_2 \cos\alpha_2 = k_n$$

Siendo α_1 y α_2 los ángulos que forman los respectivos vectores curvatura con la normal a la superficie. k1 y k2 tienen la dirección de la normal a la curva (triedro de Frenet).

2.17 Cálculo de la curvatura tangencial o geodésica.

En la fórmula 2.11, si consideramos un vector **u** , contenido en el plano tangente, tal que

$$\mathbf{u} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}_S \qquad (2.23)$$

este tiene la dirección de la curvatura geodésica. Por tanto

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n + \mathbf{k}_g = k_n\,\mathbf{n}_s + k_g\,\mathbf{u}$$

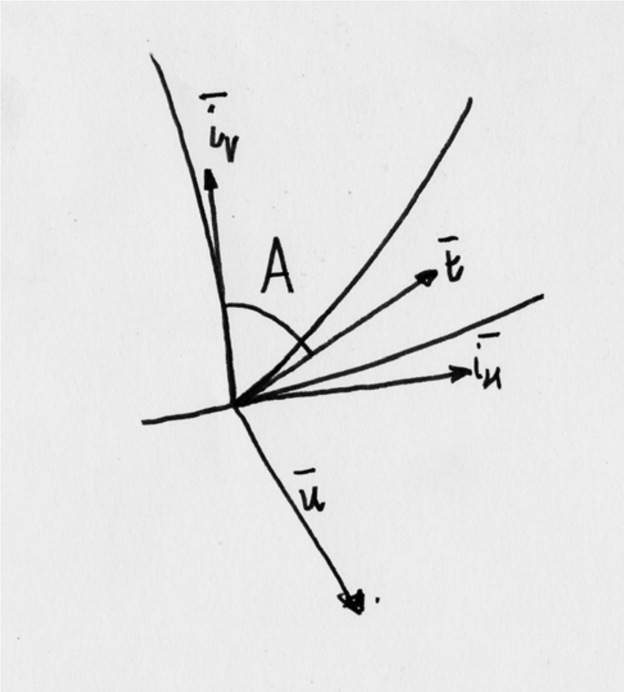
Multiplicando escalarmente por **u**, resulta

$$k_g = \mathbf{k}\cdot(\mathbf{t} \times \mathbf{n}_s) = [\mathbf{k}, \mathbf{t}, \mathbf{n}_s] = [\mathbf{x}'', \mathbf{x}', \mathbf{n}_s] \qquad (2.24)$$

$\mathbf{t} = d\mathbf{x}/ds$ $\quad\mathbf{k} = d\mathbf{t}/ds = \mathbf{x}''$. Representando por ‘ la derivación respecto del arco ds.

Cuando el parámetro es diferente del arco, por ejemplo m, el valor de k_g, se obtiene por la fórmula

$$k_g = [d^2\mathbf{x}/dm^2, d\mathbf{x}/dm, \mathbf{n}_s]/|d\mathbf{x}/dm|^3$$



Si las curvas coordenadas son ortogonales, sean $\mathbf{i}_u$ e $\mathbf{i}_v$ los vectores unitarios tangentes a las curvas u = constante y v= constante en un punto P.

El vector unitario tangente t de una curva cualquiera que pase por P, se puede expresar por

$$\mathbf{t} = \mathbf{i}_u \text{ sen } A + \mathbf{i}_v \cos A \qquad (2.25)$$

el vector u, coplanario con t y perpendicular a él, se escribirá

$\mathbf{u} = \mathbf{i}_u \cos A - \mathbf{i}_v \text{ sen } A$

siendo A el ángulo que forma **t** con la curva v = const. En el caso del elipsoide de revolución v = λ = const. y A es el acimut de la curva en P.

$$d\mathbf{t}/ds = d\,\mathbf{i}_u/ds \text{ sen } A + \mathbf{i}_u \cos A\, dA/ds + d\,\mathbf{i}_v/ds \cos A - \mathbf{i}_v \text{ sen } A\, dA/ds$$

$$\mathbf{k} = d\,\mathbf{i}_u/ds \text{ sen } A + d\,\mathbf{i}_v/ds \cos A + (\mathbf{i}_u \cos A - \mathbf{i}_v \text{ sen } A)\, dA/ds$$

$$\mathbf{k} = d\,\mathbf{i}_u/ds \text{ sen } A + d\,\mathbf{i}_v/ds \cos A + \mathbf{u}\, dA/ds$$

$$kg = (d\,\mathbf{i}_u/ds)\cdot\mathbf{u} \text{ sen } A + (d\,\mathbf{i}_v/ds)\cdot\mathbf{u} \cos A + dA/ds \qquad (2.26)$$

$(k_g)_u = (d\,\mathbf{i}_u/ds)\cdot\mathbf{u}$ es la curvatura geodésica en la dirección u = constante

$(k_g)_v = (d\,\mathbf{i}_v/ds)\cdot\mathbf{u}$ es la curvatura geodésica en la dirección v = constante

Resulta la fórmula de Liouville para el cálculo de la curvatura geodésica.

$$kg = dA/ds + (k_g)_u \text{ sen } A + (k_g)_v \cos A \qquad (2.27)$$

2.18 Geodésicas.

Las curvas cuya curvatura geodésica es nula en todos sus puntos se denominan geodésicas de la superficie o líneas geodésicas.

En el caso general en que la superficie contenga rectas (por ejemplo, los conos y cilindros), toda recta contenida en una superficie es una geodésica. Si la geodésica no es una recta, a lo largo de la misma la normal principal de la curva y la normal a la superficie coinciden. O lo que es lo mismo, el plano osculador contiene a la normal a la superficie en todos los puntos de la geodésica.

Si la normal principal y la normal a la superficie coinciden, [**x**”, **x**’, $\mathbf{n}_S$] será siempre cero en todos los puntos de la curva, luego la curva es una geodésica. Recíprocamente si la curvatura geodésica es nula, entonces coinciden las dos normales en cada punto.

Como los radios de curvatura de los círculos máximos de una esfera (dirección de la normal principal) coinciden con los radios de la esfera y estos con las normales, las geodésicas de la esfera son los círculos máximos. Desempeñan un papel análogo a las rectas en el plano.

Interpretación física.

La geodésica es la figura de equilibrio que adopta un hilo inextensible apoyado en una superficie, suponiendo que no hay rozamiento, cuando no está sometido a otras fuerzas más que a las tensiones en sus extremos y a la reacción normal de la superficie. En efecto, cada elemento del hilo está sometido a la acción según la tangente, a la tensión en sentido inverso de una tangente infinitamente próxima y a la reacción normal de la superficie. Para que haya equilibrio la resultante de estas fuerzas debe ser nula, luego la reacción debe estar en el plano que definen las dos tangentes infinitamente próximas, el plano osculador (plano que pasa por tres puntos consecutivos de la curva). De donde, el plano osculador contiene a la normal a la superficie.

La trayectoria de un punto material restringido a moverse sobre la superficie, sin rozamiento, cuando sobre él no actúa otra fuerza que la reacción normal de la superficie es una geodésica. En efecto, la dirección de la normal principal de la trayectoria – la aceleración – se confunde con la única fuerza actuante, la reacción que es normal a la superficie por la hipótesis de la ausencia de rozamiento.

2.19 Ecuación diferencial de las geodésicas.

La coincidencia de la normal principal de la curva con la normal a la superficie se puede expresar analíticamente por

$$d\mathbf{t}/ds \,.\, \mathbf{x}_u = 0 \qquad d\mathbf{t}/ds \,.\, \mathbf{x}_v = 0$$

$$ds^2 = E\,du^2 + F\,dudv + G\,dv^2 \tag{2.28}$$

Si en lugar de s se toma otro parámetro, por ejemplo u, tras laboriosos cálculos se llega a

$$d^2v/du^2 = A\,(dv/du)^3 + B\,(dv/du)^2 + C\,dv/du + D$$

Como consecuencia del Teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales, dado un punto (u,v) y la dirección de una tangente dv/du, hay una geodésica, y sólo una, que pasa por dicho punto con esa dirección.

2.20 Ecuación diferencial de las geodésicas en el elipsoide de revolución.

Dada la coincidencia de la normal principal y la normal a la superficie en todos los puntos de la geodésica, la ecuación de la normal adopta la forma:

$$\frac{X - x}{d^2x/ds^2} = \frac{Y - y}{d^2y/ds^2} = \frac{Z - z}{d^2z/ds^2}$$

Como todas las normales cortan al eje OZ (X = 0, Y = 0), resulta

$$x\, d^2y/ds^2 = y\, d^2x/ds^2$$

Los meridianos del elipsoide $y = (\text{tang}\lambda)x$, verifican idénticamente la ecuación diferencial anterior, resulta que los meridianos del elipsoide son geodésicas. Análogamente el ecuador

$$x = a \cos \lambda \qquad y = a \,\text{sen}\, \lambda \qquad z = 0$$

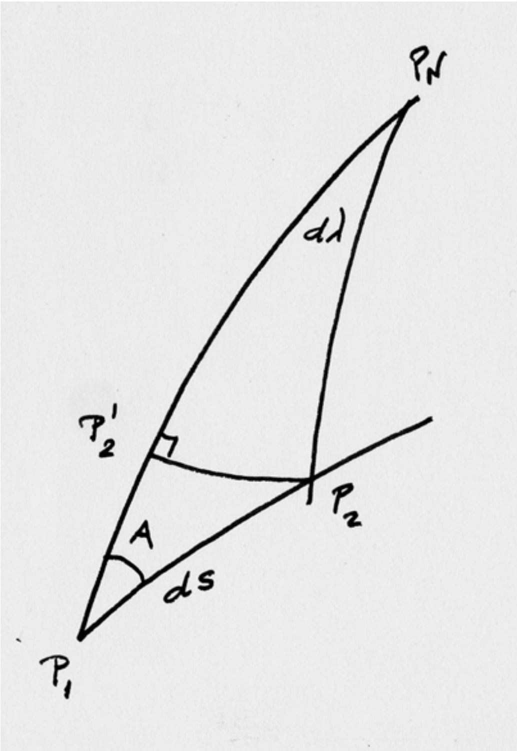
El ecuador es una geodésica del elipsoide de revolución.

Esta ecuación de segundo orden tiene la integral primera

$$d(xy' - y\,x')/ds = 0 \qquad xy' - yx' = C \tag{2.29}$$

$$x\,dy - y\,dx = Cds \qquad \text{C es una constante arbitraria.}$$

2.21 Teorema de Clairaut.



Si consideramos un arco elemental de geodésica P_1 P_2. Si ds es su longitud y P_2 P'_2 es el arco de paralelo que contiene a P_2 y A es el acimut de la geodésica en P1. El triángulo elemental P_1 P_2 P'_2 puede considerarse plano y escribir:

$$p\, d\lambda = ds \operatorname{sen} A$$

p es el radio del paralelo y dλ la diferencia de longitud.

Si adoptamos el sistema de coordenadas cilíndricas (p, λ, z) la integral primera se escribirá:

$$x = p \cos \lambda \qquad y = p \operatorname{sen} \lambda$$

$$dx = -p \operatorname{sen} \lambda + \cos \lambda\, dp$$

$$dy = p \cos \lambda + \operatorname{sen} \lambda\, dp$$

$$x dy - y\, dx = p^2\, d\lambda = C\, ds \qquad \text{Como } p\, d\lambda = ds \operatorname{sen} A$$

resulta: $$p \operatorname{sen} A = C \qquad (2.30)$$

En cada punto de la geodésica el producto del radio del paralelo por el seno del acimut es una constante. Este resultado se conoce con el nombre de Teorema de Clairaut.

Consideremos una geodésica distinta del ecuador y de un meridiano, sea A_0 el acimut en el punto de corte con el ecuador, ($A_0 \neq 0$, $A_0 \neq \pi / 2$), limitándonos al hemisferio norte, y aplicando el teorema

$$r_e.senoA = a.senoA_0 \qquad (2.31)$$

Cuando $A = \pi / 2$, la geodésica será tangente a un determinado paralelo cuya latitud será la máxima que alcanza la geodésica dada.

En efecto, (2.31) tomará la forma

$$\overline{r}_e = b \cos \overline{u}_e = a.senoA_0$$

siendo $\overline{r}_e , \overline{u}_e$ el radio del paralelo y la latitud reducida correspondiente en el que la geodésica es tangente.

En cualquier otro punto Q de la geodésica, se verificará:

$$r_Q.senA_Q = a.senA_0$$

Como $A_0 < A_Q < \pi / 2$, sigue que $r_Q > \overline{r}_e$, lo que implica latitud de Q, menor que la del paralelo donde alcanza el valor máximo.

Al considerar el hemisferio sur, por la simetría del elipsoide de revolución, se llega a la misma conclusión, hay un paralelo donde la latitud es mínima.

Cualquier geodésica, distinta del ecuador y de un meridiano, describe una infinidad de espiras en la zona del elipsoide de revolución comprendida entre dos paralelos, uno en el hemisferio norte y otro en el hemisferio sur, donde alcanza los valores máximo y mínimo de latitud respectivamente.

2.22 Sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente a la ecuación de segundo orden de las geodésicas del elipsoide de revolución.

Teniendo en cuenta $p^2\, d\lambda = C\, ds$ y $p \text{ sen } A = C$, resulta

$$p\, d\lambda = \text{sen } A\, ds = N \cos \phi\, d\lambda$$

De $ds^2 = \rho^2\, d\phi^2 + p^2\, d\lambda^2 = \rho^2\, d\phi^2 + \text{sen}^2 A\, ds^2$

$\cos^2 A\, ds^2 = \rho^2\, d\phi^2 \qquad \rho\, d\phi = \cos A\, ds$

Teniendo en cuenta que la curvatura geodésica del paralelo es $(k_g)_p = - \text{tang } \phi / N$ y la del meridiano es nula, aplicando la fórmula de Liouville resulta:

$$0 = dA/ds - \text{tang } \phi / N \ \text{sen } A$$

De todo lo anterior resulta el sistema:

$$d\lambda/ds = \text{sen } A / N \cos \phi$$

$$d\phi/ds = \cos A / \rho$$

$$dA/ds = \text{tang } \phi \text{ sen } A / N \qquad (2.32)$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden es particularmente indicado para el cálculo con ordenador.