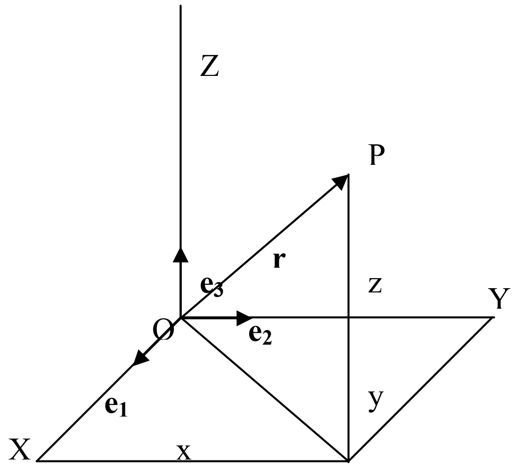
Geodesia Matemática.

Sistema de coordenadas cartesianas.



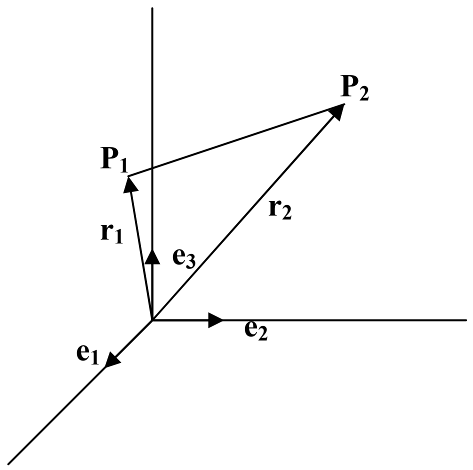
Sistema cartesiano triplemente ortogonal.

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ vectores unitarios en las direcciones de los ejes coordenados.

OP = $\mathbf{r}$ = x $\mathbf{e}_1$ + y $\mathbf{e}_2$ + z $\mathbf{e}_3$

x = r . $\mathbf{e}_1$ y = r . $\mathbf{e}_2$ z = r . $\mathbf{e}_3$

Distancia entre dos puntos P_1 P_2



$$\rho = \rho(P_1, P_2) = \rho(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

$$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Transformaciones lineales entre sistemas cartesianos (X, Y, Z)

Traslación.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Giro α alrededor del eje OX

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Giro β alrededor del eje OY

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -sen\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Giro γ alrededor del eje OZ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\gamma & 0 \\ sen\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Homotecia de centro el origen y razón k.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Transformación general de semejanza

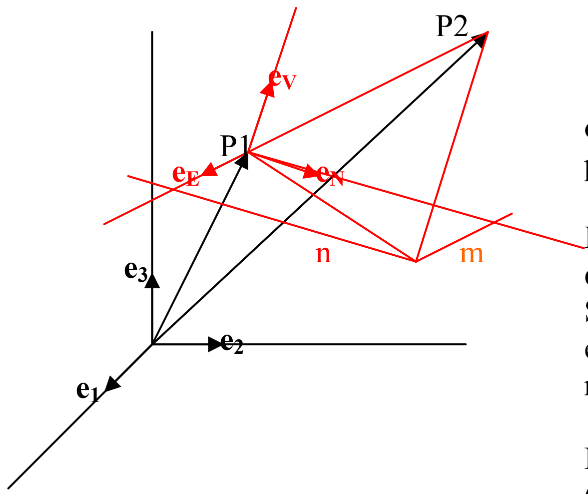
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -sen\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ sen\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\gamma & 0 \\ sen\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Transformación de semejanza con ángulos pequeños.

Aproximación de primer orden (cos x ≈ 1, sen x ≈ x)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Acimut y distancia cenital en un sistema cartesiano local de origen P_1



Sean $\mathbf{e}_E$, $\mathbf{e}_N$, $\mathbf{e}_V$ los vectores unitarios ortogonales que definen el triedro local en el punto P_1.

El ángulo Z_{12} que forman los vectores P_1P_2 y $\mathbf{e}_V$
Se denomina distancia cenital del punto P_2 en el sistema local de P1, distancia cenital si no hay peligro de confusión.

El ángulo diedro A_{12} que forman los planos $(P_1P_2\mathbf{e}_V)$ y $(\mathbf{e}_N\mathbf{e}_V)$ se denomina acimut del punto P_2 en el sistema local de P_1

Expresando los vectores $\mathbf{e}_E$, $\mathbf{e}_N$, e_V en función de los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. resulta

$$\mathbf{e}_E = x_E\,\mathbf{e}_1 + y_E\,\mathbf{e}_2 + z_E\,\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_N = x_N\,\mathbf{e}_1 + y_N\,\mathbf{e}_2 + z_N\,\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_V = x_V\,\mathbf{e}_1 + y_V\,\mathbf{e}_2 + z_V\,\mathbf{e}_3$$

Donde (x_E , y_E , z_E), (x_N , y_N , z_N), (x_V , y_V , z_V) son las componentes de los vectores y no coordenadas.

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{P_1P_2 \bullet e_E}{P_1P_2 \bullet e_N}\right) \qquad Z_{12} = \arccos\left(\frac{P_1P_2 \bullet e_V}{|P_1P_2|}\right)$$

$$A_{12} = \arctan\left(\frac{(x_2-x_1)x_E + (y_2-y_1)y_E + (z_2-z_1)z_E}{(x_2-x_1)x_N + (y_2-y_1)y_N + (z_2-z_1)z_N}\right) = \frac{m}{n}$$

$$Z_{12} = \arccos\left(\frac{(x_2-x_1)x_V + (y_2-y_1)y_V + (z_2-z_1)z_V}{\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}\right) = \frac{h}{\rho}$$

$$m = P_1P_2 \bullet e_E \quad n = P_1P_2 \bullet e_N \quad h = P_1P_2 \bullet e_V \qquad \rho = |P_1P_2|$$

Variación de la distancia en función de la variación de las coordenadas de los puntos extremos (Aproximación de primer orden).

Desarrollando la función $\rho = \rho(P_1, P_2) = \rho(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ en serie de Taylor y limitandose a los términos de primer orden, resulta:

$$\rho(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2) = \rho_0 + \frac{\delta\rho}{\delta x_1}dx_1 + \frac{\delta\rho}{\delta y_1}dy_1 + \frac{\delta\rho}{\delta z_1}dz_1$$

$$+ \frac{\delta\rho}{\delta x_2}dx_2 + \frac{\delta\rho}{\delta y_1}dy_2 + \frac{\delta\rho}{\delta z_1}dz_2$$

$$\rho_0 = \rho(P_1, P_2) = \rho(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta x_1} = \frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{(x_1 - x_2)}{\rho_0}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta y_1} = \frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{(y_1 - y_2)}{\rho_0}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta z_1} = \frac{(z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{(z_1 - x_2)}{\rho_0}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta x_2} = \frac{-(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{-(x_1 - x_2)}{\rho_0}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta y_2} = \frac{-(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{-(y_1 - y_2)}{\rho_0}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta z_2} = \frac{-(z_1 - z_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{-(z_1 - z_2)}{\rho_0}$$

Variación del acimut en función de la variación de las coordenadas de los puntos extremos (Aproximación de primer orden).

Desarrollando la función $A = A(P_1, P_2) = A(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ en serie de Taylor y limitandose a los términos de primer orden, resulta:

$$A(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2) = A_0 + \frac{\delta A}{\delta x_1}dx_1 + \frac{\delta A}{\delta y_1}dy_1 + \frac{\delta A}{\delta z_1}dz_1$$

$$+ \frac{\delta A}{\delta x_2}dx_2 + \frac{\delta A}{\delta y_1}dy_2 + \frac{\delta A}{\delta z_1}dz_2$$

$$dA = A(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2) - A_0 = \frac{\delta A}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta A}{\delta y_1} dy_1 + \frac{\delta A}{\delta z_1} dz_1$$

$$+ \frac{\delta A}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta A}{\delta y_1} dy_2 + \frac{\delta A}{\delta z_1} dz_2$$

Como tang A = m/n, se puede escribir

$$\left(1 + \tan g^2 A\right) \frac{\delta A}{\delta x_1} = \frac{\frac{\delta m}{\delta x_1}.n - m.\frac{\delta n}{\delta x_1}}{n^2} \qquad \Rightarrow$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta x_1} = \frac{\delta m}{\delta x_1}.n - m.\frac{\delta n}{\delta x_1} = -nx_E + mx_N$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta x_2} = \frac{\delta m}{\delta x_2}.n - m.\frac{\delta n}{\delta x_2} = nx_E - mx_N$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta y_1} = \frac{\delta m}{\delta y_1}.n - m.\frac{\delta n}{\delta y_1} = -ny_E + my_N$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta y_2} = \frac{\delta m}{\delta y_2}.n - m.\frac{\delta n}{\delta y_2} = ny_E - my_N$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta z_1} = \frac{\delta m}{\delta z_1}.n - m.\frac{\delta n}{\delta z_1} = -nz_E + mz_N$$

$$\left(m^2 + n^2\right) \frac{\delta A}{\delta z_2} = \frac{\delta m}{\delta z_2}.n - m.\frac{\delta n}{\delta z_2} = nz_E - mz_N$$

Siendo

$$\frac{\delta m}{\delta x_1} = -x_E \qquad \frac{\delta m}{\delta x_2} = x_E \qquad \frac{\delta m}{\delta y_1} = -y_E \qquad \frac{\delta m}{\delta y_2} = y_E \qquad \frac{\delta m}{\delta z_1} = -z_E$$

$$\frac{\delta m}{\delta z_2} = z_E \qquad \frac{\delta n}{\delta x_1} = -x_N \qquad \frac{\delta n}{\delta x_2} = x_N \qquad \frac{\delta n}{\delta y_1} = -y_N \qquad \frac{\delta n}{\delta y_2} = y_N$$

$$\frac{\delta n}{\delta z_1} = -z_N \qquad \frac{\delta n}{\delta z_2} = z_N$$

$$dA = \frac{1}{\left(m^2 + n^2\right)} \begin{pmatrix} \left(-nx_E + mx_N\right)dx_1 + \left(-ny_E + my_N\right)dy_1 + \left(-nz_E + mz_N\right)dz_1 + \\ \left(nx_E - mx_N\right)dx_2 + \left(ny_E - my_N\right)dy_2 + \left(nz_E - mz_N\right)dz_2 \end{pmatrix}$$

Variación de la distancia cenital en función de la variación de las coordenadas de los puntos extremos (Aproximación de primer orden).

Desarrollando la función $Z = Z(P_1, P_2) = Z(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ en serie de Taylor y limitandose a los términos de primer orden, resulta:

$$Z(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1, x_2 + dx_2, y_2 + dy_2, z_2 + dz_2) = Z_0 + \frac{\delta Z}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta Z}{\delta y_1} dy_1 + \frac{\delta Z}{\delta z_1} dz_1$$

$$+ \frac{\delta Z}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta Z}{\delta y_1} dy_2 + \frac{\delta Z}{\delta z_1} dz_2$$

Como $\cos Z = \dfrac{h}{\rho}$

$h = (x_2 - x_1)x_V + (y_2 - y_1)y_V + (z_2 - z_1)z_V$

$\rho = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ se puede escribir:

$$-\, sen\, Z \cdot \frac{\delta Z}{\delta x_1} = \frac{\dfrac{\delta h}{\delta x_1}\rho - h\dfrac{\delta \rho}{\delta x_1}}{\rho^2} \qquad -\rho^2 sen Z \frac{\delta Z}{\delta x_1} = \frac{\delta h}{\delta x_1}\rho - h\frac{\delta \rho}{\delta x_1}$$

$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta x_1} = \frac{\delta h}{\delta x_1} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta x_1} = -x_V - \cos Z \cdot \frac{x_1 - x_2}{\rho}$$

$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta y_1} = \frac{\delta h}{\delta y_1} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta y_1} = -y_V - \cos Z \cdot \frac{y_1 - y_2}{\rho}$$

$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta z_1} = \frac{\delta h}{\delta z_1} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta z_1} = -z_V - \cos Z \cdot \frac{z_1 - z_2}{\rho}$$

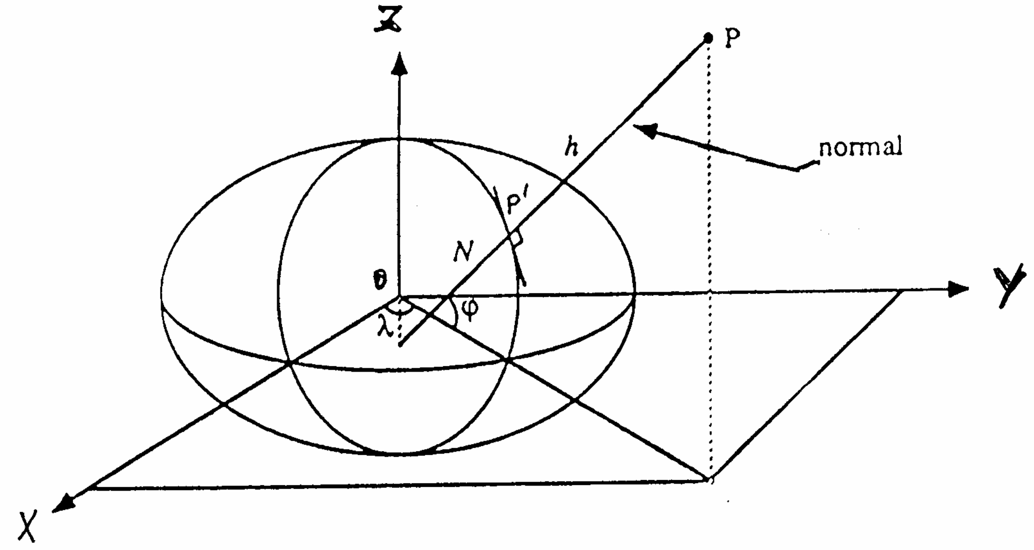
$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta x_2} = \frac{\delta h}{\delta x_2} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta x_2} = x_V + \cos Z \cdot \frac{x_1 - x_2}{\rho}$$

$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta y_2} = \frac{\delta h}{\delta y_2} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta y_2} = y_V + \cos Z \cdot \frac{y_1 - y_2}{\rho}$$

$$-\rho \cdot senZ \frac{\delta Z}{\delta z_2} = \frac{\delta h}{\delta z_2} - \cos Z \frac{\delta \rho}{\delta z_2} = z_V + \cos Z \cdot \frac{z_1 - z_2}{\rho}$$

$$dZ = \frac{\delta Z}{\delta x_1} dx_1 + \frac{\delta Z}{\delta y_1} dy_1 + \frac{\delta Z}{\delta z_1} dz_1 + \frac{\delta Z}{\delta x_2} dx_2 + \frac{\delta Z}{\delta y_1} dy_2 + \frac{\delta Z}{\delta z_1} dz_2$$

Sistema de coordenadas geodésicas (ϕ, λ. h)



Utilizando un elipsoide de revolución puede establecerse una correspondencia entre los puntos del espacio y una tripleta de números ***(ϕ, λ. h)*** que se denominan coordenadas geodésicas del punto. Esto se consigue asociando a cada punto P un punto P' del elipsoide tal que P está sobre la normal al elipsoide por P'. Las coordenadas ϕ, λ de P son la latitud y longitud geodésica de P' sobre el elipsoide, h es la distancia sobre la normal entre P y P', este valor se denomina altitud geodésica, aunque está también extendido el nombre de altitud elipsoidal.

Si tenemos un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el centro de simetría del elipsoide y cuyo eje OZ es el semieje menor del elipsoide, OX coincide con el origen de longitudes λ en el plano perpendicular a OZ (ecuador) y eje OY formando un triedro orientado a derechas con los otros dos

El vector

$$OP = OP' + P'P$$

$$OP = (x,y,z)$$

$$OP' = (N \cos\phi \cos\lambda, N \cos\phi \,\mathrm{sen}\lambda, N (1 - e^2)\, \mathrm{sen}\phi)$$

$$P'P = h (\cos\phi \cos\lambda, \cos\phi \,\mathrm{sen}\lambda, \mathrm{sen}\phi)$$

Resulta

$$x = (N+h) \cos\phi \cos\lambda$$

$$y = (N+h) \cos\phi \,\mathrm{sen}\lambda$$

$$z = (N (1 - e^2)+h)\, \mathrm{sen}\phi$$

la relación entre los dos sistemas de coordenadas.

Como N es función de φ la transformación inversa requiere un *procedimiento iterativo* para la determinación de la φ y consecuentemente de la h.

Se verifica que tan λ = y/x , tomando para h el valor inicial cero se determina un valor aproximado de φ y se continua el proceso hasta que no se producen cambios significativos en el valor de φ.

Existen *fórmulas cerradas* que dan directamente la transformación inversa:

Método de Bowring:

$$E^2 = a^2 - b^2 \qquad k_1 = \frac{a}{b} \qquad k_2 = \frac{E^2}{a} \qquad k_3 = \frac{E^2}{b}$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{k_1 z}{r}\right)$$

$$\varphi_1 = \arctan\left(\frac{z + k_3 sen^3\theta}{r - k_2 \cos^3\theta}\right) \qquad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi_1}}$$

$$h = \frac{r}{\cos\varphi_1} - N$$

Si *h > 500000 m.* *y* *h < 10000000 m* entoces

$$\varphi = \arctan\left(\frac{z(N+h)}{r\left[N\left(1-e^2\right)+h\right]}\right)$$

en otro caso:

$$\varphi = \varphi_1$$

Cambio de las coordenadas (ϕ, λ, h) al cambiar el elipsoide.

Si se adoptan nuevos valores de a y e para el elipsoide que se utiliza para determinar las coordenadas geodésicas, manteniendo el centro del elipsoide coincidente con el origen de coordenadas del sistema cartesiano, para un punto P(x, y, z) resultarán unas nuevas coordenadas geodésicas *(ϕ', λ', h')*.

Se verifica que $\lambda' = \lambda$, al no cambiar la x, y, z del punto

$$\tan \lambda' = \tan \lambda = \frac{y}{x}$$

Cálculo de dϕ y dh.

La condición dx = dy = dz = 0   implica dp=0, siendo

$$p = \sqrt{x^2 + y^2} = (N + h)\cos\phi$$

p es función de a, e, ϕ y h,

$$dp = \frac{\partial p}{\partial a} da + \frac{\partial p}{\partial e} de + \frac{\partial p}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial p}{\partial h} dh = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial N}{\partial a}\cos\phi \qquad \frac{\partial p}{\partial e} = \frac{\partial N}{\partial e}\cos\phi \qquad \frac{\partial p}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(N\cos\phi) - hsen\phi \qquad \frac{\partial p}{\partial h} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial N}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\phi}}\right) = \frac{N}{a} \qquad \frac{\partial N}{\partial e} = \frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\phi}}\right) = aesen^2\phi\left(1 - e^2 sen^2\phi\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial N}{\partial e} = \frac{esen^2\phi}{1 - e^2}\rho$$

ρ radio de curvatura normal en la dirección del meridiano.

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(N\cos\phi) = \frac{\partial N}{\partial \phi}\cos\phi - Nsen\phi$$

$$\frac{\partial N}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\phi}}\right) = a\left(1 - e^2 sen^2\phi\right)^{-\frac{3}{2}} e^2 sen\phi\cos\phi = \frac{e^2}{1 - e^2}\rho sen\phi\cos\phi$$

Resulta:

$$\frac{\partial p}{\partial a}=\frac{N}{a}\cos\phi \qquad \frac{\partial p}{\partial e}=\frac{esen^2\phi\cos\phi}{1-e^2}\rho \qquad \frac{\partial p}{\partial \phi}=-\rho sen\phi - hsen\phi$$

$$\frac{\partial p}{\partial h}=\cos\phi$$

Como dz = 0 y $z=\left[N\left(1-e^2\right)+h\right]sen\phi$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial e}de+\frac{\partial z}{\partial \phi}d\phi+\frac{\partial z}{\partial h}dh=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=(1-e^2)sen\phi\frac{\partial N}{\partial a}=(1-e^2)sen\phi\frac{N}{a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial e}=-2Nesen\phi+(1-e^2)sen\phi\frac{\partial N}{\partial e}=-2Nesen\phi+\rho esen^3\phi$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi}(Nsen\phi)=\frac{\partial N}{\partial \phi}sen\phi+N\cos\phi=\frac{e^2}{1-e^2}\rho sen^2\phi\cos\phi=\frac{1}{1-e^2}\rho\cos\phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi}=(1-e^2)\frac{\partial}{\partial \phi}\left(Nsen\phi\right)+h\cos\phi=\rho\cos\phi+h\cos\phi$$

$$\frac{\partial z}{\partial h}=sen\phi$$

Sustituyendo las derivas parciales en dp=0, dz=0, resulta un sistema de ecuaciones en **dϕ**, **dh** que permite calcular estos valores en función de da y de que son datos conocidos.

$$\left(\rho+h\right)sen\phi\,\mathbf{d\varphi}-\cos\phi\,\mathbf{dh}=\frac{N}{a}\cos\phi da+\frac{esen^2\phi\cos\phi}{1-e^2}\rho de$$

$$\left(\rho+h\right)\cos\phi\,\mathbf{d\varphi}+sen\phi\,\mathbf{dh}=-\left(1-e^2\right)sen\phi\frac{N}{a}da+\left(2Nesen\phi-\rho esen^3\phi\right)de$$

Multiplicando la primera ecuación por *senϕ* y la segunda por *cosϕ* y sumando, resulta

$$\mathbf{d\varphi}=\frac{1}{\rho+h}\left(e^2\frac{N}{a}sen\phi\cos\phi da+\frac{e}{1-e^2}\left(\rho+(1-e^2)N\right)sen\phi\cos\phi de\right)$$

Multiplicando la primera ecuación por $cos\phi$ y la segunda por $sen\phi$ y restando, resulta

$$\mathbf{dh} = -\frac{a}{N}da + eNsen^2\phi de$$

Tras algunos cálculos, se comprueba que:

$$\frac{esen^3\phi\cos\phi}{1-e^2}\rho + 2eNsen\phi\cos\phi - esen^3\phi\cos\phi\rho = \frac{e}{1-e^2}sen\phi\cos\phi\left(e^2sen^2\phi\rho + 2N\left(1-e^2\right)\right)$$

$$\frac{-N}{a}\cos^2\phi - (1-e^2)\frac{N}{a}sen^2\phi = -\frac{N}{a}(1-e^2sen^2\phi) = -\sqrt{1-e^2sen^2\phi} = -\frac{a}{N}$$

Si en lugar de la excentricidad e se utiliza el achatamiento, teniendo en cuenta que

$e^2 = 2f - f^2$,resulta $ede = (1-f)df$ y basta efectuar la sustitución.

Cambio de las coordenadas (ϕ, λ, h) al cambiar las coordenadas (x,y,z).

Diferenciando respecto a ϕ, λ, h las ecuaciones:

$$x = (N+h)\cos\phi\cos\lambda \qquad y = (N+h)\cos\phi sen\lambda \qquad z = \left(N\left(1-e^2\right)+h\right)sen\phi$$

resulta:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial x}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial x}{\partial h}dh$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial y}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial y}{\partial h}dh$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial\phi}d\phi + \frac{\partial z}{\partial\lambda}d\lambda + \frac{\partial z}{\partial h}dh$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\phi} & \frac{\partial x}{\partial\lambda} & \frac{\partial x}{\partial h} \\ \frac{\partial y}{\partial\phi} & \frac{\partial y}{\partial\lambda} & \frac{\partial y}{\partial h} \\ \frac{\partial z}{\partial\phi} & \frac{\partial z}{\partial\lambda} & \frac{\partial z}{\partial h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\phi} = \frac{\partial}{\partial\phi}(N\cos\phi)\cos\lambda - hsen\phi\cos\lambda = -(\rho+h)sen\phi\cos\lambda$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}(N\cos\phi)sen\lambda - hsen\phi sen\lambda = -(\rho + h)sen\phi sen\lambda$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = (1 - e^2)\frac{\partial}{\partial \phi}(Nsen\phi) + h\cos\phi = (\rho + h)\cos\phi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = -(N + h)\cos\phi sen\lambda \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = (N + h)\cos\phi\cos n\lambda \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial h} = \cos\phi\cos\lambda \qquad \frac{\partial y}{\partial h} = \cos\phi sen\lambda \qquad \frac{\partial z}{\partial h} = sen\phi$$

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\rho + h)sen\phi\cos\lambda & -(N + h)\cos\phi sen\lambda & \cos\phi\cos\lambda \\ -(\rho + h)sen\phi sen\lambda & (N + h)\cos\phi\cos\lambda & \cos\phi sen\lambda \\ (\rho + h)\cos\phi & 0 & sen\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\phi \\ d\lambda \\ dh \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones,

$$d\phi = -\frac{sen\phi\cos\lambda}{(\rho + h)}dx - \frac{sen\phi sen\lambda}{(\rho + h)}dy + \frac{\cos\phi}{(\rho + h)}dz$$

$$d\lambda = -\frac{sen\lambda}{(N + h)\cos\phi}dx + \frac{\cos\lambda}{(N + h)\cos\phi}dy$$

$$dh = (\cos\phi\cos\lambda)dx + (\cos\phi sen\lambda)dy + sen\phi dz$$

Cambio del sistema de coordenadas (ϕ, λ, h) manteniendo los ejes cartesianos paralelos. Fórmulas de Molodensky.

La transformación es la composición de dos transformaciones: un cambio de elipsoide y una translación. La translación es equivalente a un cambio de coordenadas dx, dy, dz en la que el origen permanece fijo. La fórmula general de cambio de elipsoide será la suma de los dos grupos de fórmulas anteriores. Supongamos que uno de los elipsoides es el WGS 84 y el otro el nacional de un país, entonces:

$$\phi_{WGS84} = \phi_{Nacional} + d\phi \qquad \lambda_{WGS84} = \lambda_{Nacional} + d\lambda \qquad h_{WGS84} = h_{Nacional} + dh$$

$$d\phi = -\frac{sen\phi\cos\lambda}{(\rho + h)}dx - \frac{sen\phi sen\lambda}{(\rho + h)}dy + \frac{\cos\phi}{(\rho + h)}dz + \frac{N}{a(\rho + h)}sen\phi\cos\phi da +$$

$$\frac{e}{(\rho + h)(1 - e^2)}\left(\rho + (1 - e^2)N\right)sen\phi\cos\phi de$$

$$d\lambda = -\frac{sen\lambda}{(N+h)\cos\phi}dx + \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi}dy$$

$$dh = (\cos\phi\cos\lambda)dx + (\cos\phi sen\lambda)dy + sen\phi dz - \frac{a}{N}da + \left(eNsen^2\phi\right)de$$

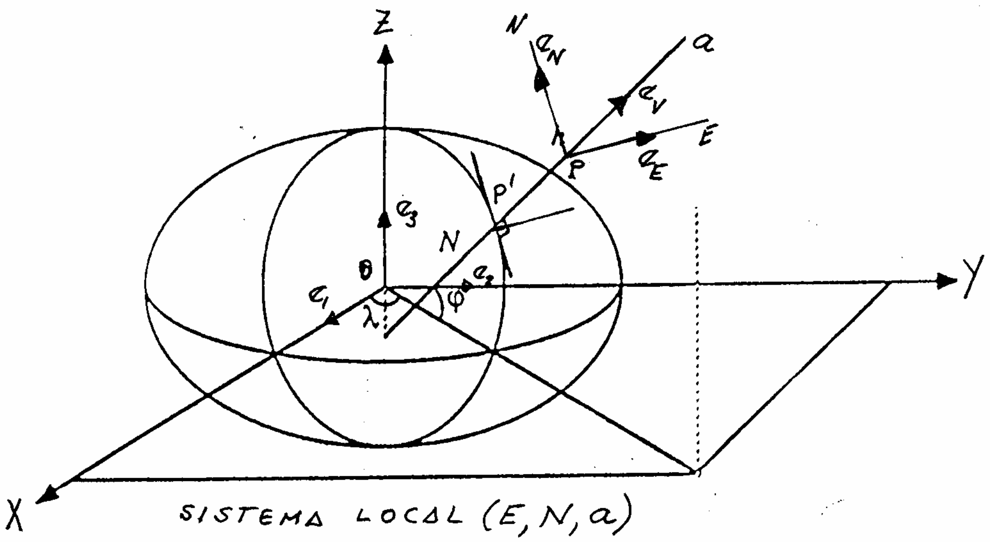
Si en lugar de utilizar la excentricidad e, se utiliza f, entoces

$$d\phi = -\frac{sen\phi\cos\lambda}{(\rho+h)}dx - \frac{sen\phi sen\lambda}{(\rho+h)}dy + \frac{\cos\phi}{(\rho+h)}dz + \frac{N}{a(\rho+h)}sen\phi\cos\phi da +$$
$$\frac{1}{(\rho+h)}\left(\rho\frac{a}{b} + \frac{b}{a}N\right)sen\phi\cos\phi df$$

$$d\lambda = -\frac{sen\lambda}{(N+h)\cos\phi}dx + \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi}dy$$

$$dh = (\cos\phi\cos\lambda)dx + (\cos\phi sen\lambda)dy + sen\phi dz - \frac{a}{N}da + \left(\frac{b}{a}Nsen^2\phi\right)df$$

Sistema de coordenadas local (Es, Nt, a)



En un punto P de coordenadas (ϕ, λ, h) es posible definir un sistema cartesianos cuyos vectores unitarios sean paralelos respectivamente (**e**$_E$) a la dirección del primer vertical en el punto P', (**e**$_N$) a la dirección del meridiano en P' , (**e**$_V$) a la dirección de la normal por P al elipsoide que define el sistema (ϕ, λ, h).

El vector OP' tiene de componentes

$x = N \cos\phi \cos \lambda \qquad y = N \cos\phi \,\mathrm{sen}\lambda \qquad z = N(1\text{-}e^2)\, \mathrm{sen}\phi$

Un vector en la dirección del primer vertical es la derivada parcial de OP' respecto de λ (ϕ = constante)

$(\text{-}N \cos\phi \,\mathrm{sen}\lambda,\ N \cos\phi \cos\lambda,\ 0)$

Dividiendo por su módulo Ncosϕ, resulta

$e_E = (\text{-}\mathrm{sen}\lambda,\ \cos\lambda,\ 0)$

Un vector en la dirección del meridiano por P' es la derivada parcial de OP' respecto a ϕ (λ = constante)

$((N_\phi \cos\phi - N \,\mathrm{sen}\phi) \cos\lambda\ ,\ (N_\phi \cos\phi - N \,\mathrm{sen}\phi)\, \mathrm{sen}\lambda,\ (1 - e^2)(N_\phi \,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi))$

$N_\phi = N\, e^2 \,\mathrm{sen}\phi \cos\phi /(1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2\phi) \qquad N = a / (1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2\phi)^{1/2}$

$N_\phi \cos\phi - N \,\mathrm{sen}\phi = - N\, (1\text{-}\ e^2\ )\mathrm{sen}\phi\ /\ (1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2\phi)$

$(1 - e^2)(N_\phi \,\mathrm{sen}\phi + N \cos\phi) = N\, (1 - e^2)\cos\phi\ /\ (1 - e^2 \,\mathrm{sen}^2\phi)$

$-N(1-e^2)\left(\text{sen}\phi\cos\lambda/(1-e^2\,\text{sen}^2\phi),\ \ \text{sen}\phi\,\text{sen}\lambda/(1-e^2\,\text{sen}^2\phi),\ -\cos\phi\,/\,(1-e^2\,\text{sen}^2\phi)\right)$

Resulta

$$\mathbf{e}_N = (-\text{sen}\phi\cos\lambda,\ -\text{sen}\phi\,\text{sen}\lambda,\ \cos\phi)$$

Por último el vector

$$\mathbf{e}_V = (\cos\phi\cos\lambda,\ \cos\phi\,\text{sen}\lambda,\ \text{sen}\phi)$$

es vector unitario normal a la superficie.

Transformación de coordenadas entre los sistemas (X, Y, Z) y (Es, Nt, a).

Un punto Q en el sistema (Es, Nt, a) se expresará como

$$PQ = Es\ \mathbf{e}_E + Nt\ \mathbf{e}_N + a\ \mathbf{e}_V$$

El mismo punto en el sistema (X, Y, Z) será

$$OQ = x\ \mathbf{e}_1 + y\ \mathbf{e}_2 + z\ \mathbf{e}_3$$

La relación OQ = OP + PQ , siendo (x_0, y_0, z_0) las coordenadas de P

$$x\ \mathbf{e}_1 + y\ \mathbf{e}_2 + z\ \mathbf{e}_3 = x_0\ \mathbf{e}_1 + y_0\ \mathbf{e}_2 + z_0\ \mathbf{e}_3 + Es\ \mathbf{e}_E + Nt\ \mathbf{e}_N + a\ \mathbf{e}_V$$

Como $\mathbf{e}_E = -\text{sen}\lambda\ \mathbf{e}_1 + \cos\lambda\ \mathbf{e}_2$

$$\mathbf{e}_N = -\text{sen}\phi\cos\lambda\ \mathbf{e}_1 - \text{sen}\phi\,\text{sen}\lambda\ \mathbf{e}_2 + \cos\phi\ \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{e}_V = \cos\phi\cos\lambda\ \mathbf{e}_1 + \cos\phi\,\text{sen}\lambda\ \mathbf{e}_2 + \text{sen}\phi\ \mathbf{e}_3$$

Sustituyendo e igualando componentes, resulta

$$x = x_0 - \text{sen}\lambda\ Es - \text{sen}\phi\cos\lambda\ Nt + \cos\phi\cos\lambda\ a$$

$$y = y_0 + \cos\lambda\ Es - \text{sen}\phi\,\text{sen}\lambda\ Nt + \cos\phi\,\text{sen}\lambda\ a$$

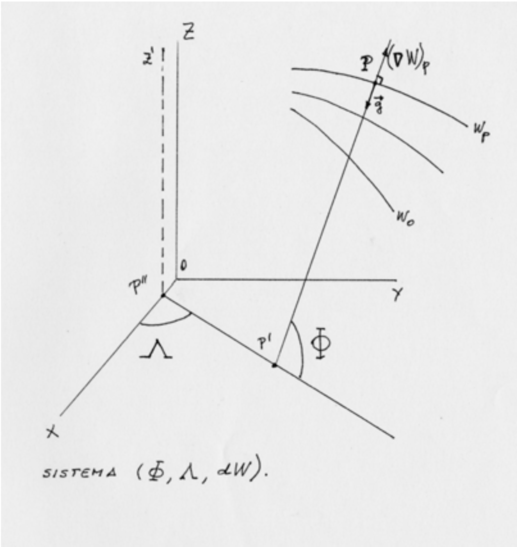
$$z = z_0 \qquad\qquad + \cos\phi\ Nt \quad + \text{sen}\phi\ a$$

Matricialmente

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{sen}\lambda & -\text{sen}\phi.\cos\lambda & \cos\phi.\cos\lambda \\ \cos\lambda & -\text{sen}\phi.\text{sen}\lambda & \cos\phi.\text{sen}\lambda \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Es \\ Nt \\ a \end{bmatrix}$$

El curioso lector puede comprobar que la matriz que define la transformación es ortonormal, $A^{-1} = A^{T}$ con lo que fácilmente se obtiene la transformación inversa.

Sistema de coordenadas definido por una función potencial (Φ, Λ, dW).



En un sistema cartesiano XYZ consideramos una función

$$W = W(x, y, z)$$

W es una función potencial o armónica, es decir:

- W posee derivadas primeras y segundas continuas
- $\Delta W = \dfrac{\delta^2 W}{\delta x^2} + \dfrac{\delta^2 W}{\delta y^2} + \dfrac{\delta^2 W}{\delta z^2} = 0$

en todo punto P(x,y,z).

Las superficies W = constante se denominan superficies equipotenciales o equipotenciales cuando no haya peligro de confusión. Las trayectorias ortogonales de las equipotenciales se denominan líneas de fuerza del campo de potencial W.

Dado un punto P existe una equipotencial y, sólo una, que contiene a P. Estableciendo una equipotencial de referencia W_R, al punto P se le puede asignar el número

$$dW = W_P - W_R$$

Considerando en P el gradiente de W, ∇W, este vector es normal en P a la superficie y tangente a la línea de fuerza que pasa por P. Si consideramos la recta que contiene a ∇W esta recta corta al plano XY formando un ángulo Φ, que se denomina latitud del punto P en el sistema definido por W. El plano que contiene a la recta anterior y es paralelo al eje Z, forma un ángulo con el plano XZ que se denomina longitud del punto P. Así, a cada punto se le puede asignar unas coordenadas (Φ, Λ, dW).

Las relaciones entre Φ, Λ y las componentes del gradiente de W son

$$\Phi = \arctan\left(\frac{-\dfrac{\delta W}{\delta z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\delta W}{\delta x}\right)^2 + \left(\dfrac{\delta W}{\delta y}\right)^2}} \right) \qquad \Lambda = \arctan\left(\frac{\dfrac{\delta W}{\delta y}}{\dfrac{\delta W}{\delta x}} \right)$$

y por otra parte, la dirección de la recta P'P es

(cos Φ cos Λ, cos Φ sen Λ, sen Φ) = $-\nabla W / |\nabla W|$ admitiendo que la dirección del gradiente va dirigida hacia el interior de la equipotencial, como ocurre con el potencial de la gravedad.