Geometría del Elipsoide de revolución
2ª parte
E. Calero
Versión 1.0
Marzo 2005

PROBLEMAS DIRECTO E INVERSO DE LA GEODESIA

2.23 Problemas directo e inverso de la Geodesia.
2.24 Algunas fórmulas previas.
- 2.24.1 Elemento del arco de meridiano $d\beta$ en función de la latitud reducida ψ
- 2.24.2 Radio de curvatura normal en un punto de la geodésica y en la dirección de esta.
- 2.24.3 Imagen esférica de una geodésica del elipsoide de revolución
- 2.24.4 Triángulo esférico polar asociado a un arco de geodésica.
- 2.24.5 Longitud del elemento de arco de geodésica distinta del ecuador
- 2.24.6 Cálculo de la longitud (geodésica distinta del ecuador)
- 2.24.7 Integración del arco (geodésica distinta del ecuador)
- 2.24.8 Longitud del arco de meridiano entre el ecuador y un punto de latitud reducida ψ
- 2.24.9 Longitud del arco de meridiano entre el ecuador y un punto de latitud geodésica φ
- 2.24.10 Cálculo de la longitud λ en función de ω

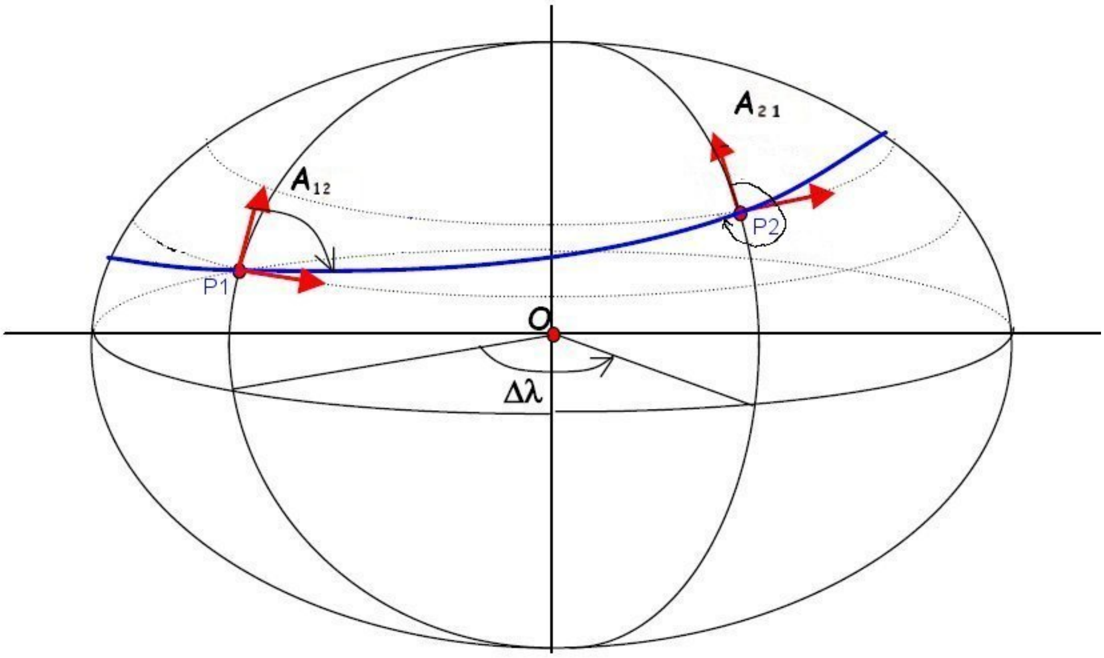
2.25 Elementos del triángulo polar sobre la esfera
2.26 Problema Inverso Solución de J.J. Levallois y Du Puy.
2.27 Problema Inverso. Solución iterativa de Helmert modificada por Sodano
2.28 Problema directo. Método de E. Sodano.
2.29 Problema inverso. Fórmulas de Sodano.

CÁLCULOS EN EL ELIPSOIDE

2.30 Cálculo de una triangulación en el elipsoide

- 2.30.1 Cálculos en la esfera.
- 2.30.2 Teorema de Legendre.
- 2.30.3 Extensión del teorema de Legendre al Elipsoide

2.23 Problemas directo e inverso de la Geodesia.



Dados dos puntos P1 y P2 de un elipsoide de revolución:

PROBLEMA DIRECTO:

Conocidas

Las coordenadas geodésicas (φ_1, λ_1) de P1

La longitud del arco de geodésica P1 - P2

El acimut A_{12} de P2 en P1

Determinar

Las coordenadas geodésicas (φ_2, λ_2) de P2

El acimut A_{21} de P1 en P2

PROBLEMA INVERSO:

Conocidas

Las coordenadas geodésicas (φ_1, λ_1) de P1 y (φ_2, λ_2) de P2

Determinar:

La longitud del arco de geodésica P1 - P2

El acimut A_{12} de P2 en P1

El acimut A_{21} de P1 en P2

2.24 Algunas fórmulas previas.

2.24.1 Elemento del arco de meridiano $d\beta$ en función de la latitud reducida ψ

En la elipse meridiana

$$x = a.\cos\psi \qquad\qquad y = b.sen\psi$$

$$d\beta^2 = dx^2 + dy^2 = \left(a^2 sen^2\psi + b^2\cos^2\psi\right)d\psi^2 = b^2(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}sen^2\psi)d\psi^2$$

$$d\beta = b\sqrt{1+e'^2 sen^2\psi}\,d\psi$$

El arco de meridiano entre el ecuador y un punto de latitud reducida ψ

$$\beta = b\int_0^{\psi}\sqrt{1+e'^2 sen^2\psi}\,d\psi$$

integral elíptica de primera especie.

2.24.2 Radio de curvatura normal en un punto de la geodésica y en la dirección de esta.

Sean:

A acimut de la geodésica en un punto P
R radio de curvatura normal en la dirección A en el punto P
ρ radio de curvatura normal en la dirección del meridiano de P
N radio de curvatura normal en la dirección del primer vertical de P
A_0 acimut de la geodésica en el punto de corte con el ecuador
r radio del paralelo que pasa por P

Aplicando el teorema de Euler

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\cos^2 A + \frac{1}{N}sen^2 A$$

y el teorema de Clairaut

$$r.senA = a.senA_0$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} = \frac{a}{W} \qquad \rho = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}^3} = \frac{a(1-e^2)}{W^3} \qquad W = \sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho} + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho}\right) sen^2 A$$

$$senA = \frac{a.senA_0}{r} = \frac{a.senA_0}{N.\cos\varphi} = \frac{WsenA_0}{\cos\varphi}$$

$$\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho} = \frac{W}{a} - \frac{W^3}{a\left(1-e^2\right)} = \frac{W\left(\left(1-e^2\right)-W^2\right)}{a\left(1-e^2\right)} = -\frac{e^2 W\cos^2\varphi}{a\left(1-e^2\right)}$$

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{\rho}\right) sen^2 A = -e^2 \frac{1}{\rho} sen^2 A_0$$

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{\rho}\left(1-e^2 sen^2 A_0\right)$ pero $K^{-1} = \left(1-e^2 sen^2 A_0\right) = const.$ es una constante

$$R = \frac{\rho}{\left(1-e^2 sen^2 A_0\right)} \qquad R = K.\rho$$

En todo punto de una geodésica del elipsoide de revolución, distinta del ecuador y de un meridiano, se verifica que el radio de curvatura normal en la dirección de la geodésica es proporcional al radio de curvatura normal en la dirección del meridiano.

2.24.3 <u>Imagen esférica de una geodésica del elipsoide de revolución</u>

Consideremos la elipse meridiana y su circunferencia principal, al girar alrededor del semieje menor, ambas curvas describen un elipsoide de revolución y una esfera respectivamente. Esta esfera concéntrica con el elipsoide y coincidente en el ecuador se la denomina *esfera principal del elipsoide*, algunos la llama también esfera de Jacobi. Las geodésicas de la esfera son los círculos máximos.

Dada una geodésica del elipsoide cuyo acimut en C (punto de corte con el ecuador) es A_{0e} , existe un círculo máximo de la esfera que pasa por el punto C con un acimut esférico A_{0E} tal que

$$A_{0e} = A_{0E}$$

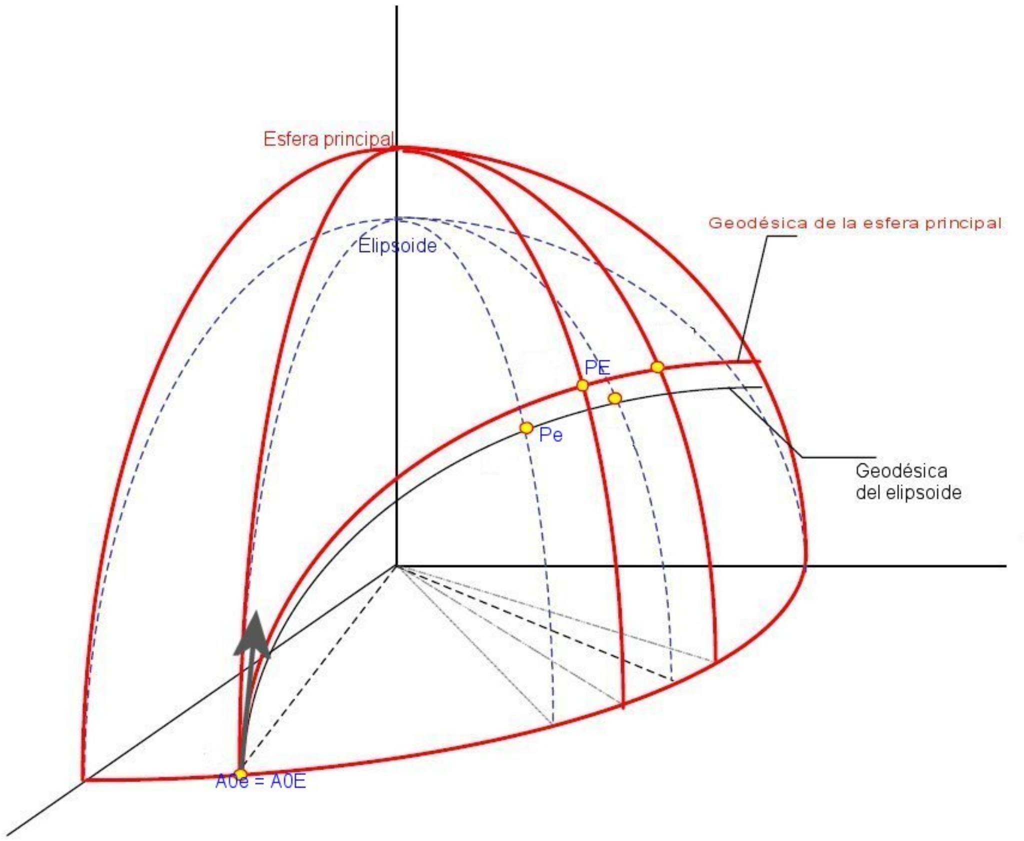
Se P_e un punto de la geodésica anterior $\left(\varphi_e, \lambda_e, \psi_e\right)$ ψ_e latitud reducida, establecemos la correspondencia

$$P_e \rightarrow P_E$$

P_E es un punto del círculo máximo anterior tal que

$$\varphi_E = \psi_e$$

φ_E es la latitud en la esfera. Esta correspondencia es biunívoca entre los puntos del elipsoide y los puntos de la esfera. El caso $A_{0e} = \pi/2$ es trivial, aplica el ecuador sobre si mismo, ya que el ecuador es una geodésica en ambas superficies. El caso $A_{0e} = 0$ aplica el meridiano sobre su circunferencia principal.



Propiedades.

1. La correspondencia conserva los acimutes $A_{Pe} = A_{PE}$

Aplicando el teorema de Clairaut en el elipsoide y en la esfera

$$r_e senA_e = a.senA_{0e} \qquad r_E senA_E = a.senA_{0E}$$
$$r_e senA_e = r_E senA_E$$

Pero $r_e = r_E$ por la forma de establecer la correspondencia, luego

$$senA_e = senA_E$$

2. La correspondencia conserva las latitudes reducidas

$$\psi_E = \varphi_E = \psi_e$$

ya que en la esfera la latitud reducida coincide con la latitud esférica.

3. La correspondencia no conserva las longitudes.

Aplicando la ecuación de Laplace:

$$dA = sen\varphi d\lambda$$

en dos puntos infinitesimalmente vecinos en la geodésica del elipsoide y en los puntos correspondientes de la esfera:

$$dA_E = d\lambda_E sen\varphi_E = d\lambda_E sen\psi_e$$

$$dA_e = d\lambda_e sen\varphi_e$$

resulta: $$d\lambda_E sen\psi_e = d\lambda_e sen\varphi_e$$

$$d\lambda_E - d\lambda_e = \left(\frac{sen\varphi_e}{sen\psi_e} - 1 \right) d\lambda_e$$

Integrando

$$\varepsilon = \lambda_E - \lambda_e = \int_0^{\lambda_e} \left(\frac{sen\varphi_e}{sen\psi_e} - 1 \right) d\lambda_e$$

Como el integrando es siempre positivo $\varepsilon > 0$, la longitud del punto correspondiente en la esfera avanza la cantidad anterior.

2.24.4 Triángulo esférico polar asociado a un arco de geodésica.

Sean P_e y Q_e los extremos de un arco de geodésica en el elipsoide, usando la correspondencia anterior, se obtienen los puntos P_E y Q_E tal que P_E tiene la latitud esférica ψ_{eP} y su acimut esférico es A_{eP}, análogamente en Q_E. Con los meridianos que pasan por P_E y Q_E y el arco P_E Q_E, se forma un triángulo esférico cuyo ángulo en el polo es

$$\lambda_Q - \lambda_P + \varepsilon_Q - \varepsilon_P = \Delta\lambda + \Delta\varepsilon$$

La utilización de la correspondencia anterior, reduce algunos de los cálculos a la trigonometría esférica.

2.24.5 Longitud del elemento de arco de geodésica distinta del ecuador

Consideremos los puntos P y Q infinitamente próximos en una geodésica, en el meridiano de P un punto H tal que está en el mismo paralelo que Q. Se forma un triángulo infinitesimal en el que:

$$ds = \frac{PH}{\cos A} = \frac{d\beta}{\cos A} \qquad d\beta = b\sqrt{1 + e'^2 sen^2\psi}\, d\psi$$

$d\beta$ es la longitud del arco de meridiano PH.

Aplicando el teorema de Clairaut

$$rsenA = asenA_0 \Rightarrow a\cos\psi senA = asenA_0 \Rightarrow \cos\psi senA = senA_0$$

$$ds = \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \frac{sen^2 A_0}{\cos^2\psi}}} = b\frac{\left(1 + e'^2 sen^2\psi\right)^{\frac{1}{2}}\cos\psi}{\sqrt{\cos^2 A_0 - sen^2\psi}}\, d\psi$$

A_0 es el acimut de la geodésica en C, punto de corte con el ecuador

Haciendo el cambio de variable

$$sen\psi = \cos A_0 sen\omega \qquad \cos\psi d\psi = \cos A_0 \cos\omega d\omega$$

$$ds = b\sqrt{\left(1 + e'^2\cos^2 A_0 sen^2\omega\right)}\, d\omega$$

ω es la distancia en la esfera desde C al punto de latitud ψ, se llama elongación geodésica.

2.24.6 Cálculo de la longitud (geodésica distinta del ecuador)

En el triángulo anterior

$$QH = rd\lambda = ds\cdot senA \qquad r^2 d\lambda = a.senA_0 ds \qquad d\lambda = \frac{ds.senA_0}{a.\cos^2\psi}$$

Utilizando el cambio de variables anterior y el valor de ds:

$$d\lambda = \frac{b}{a}\frac{\sqrt{\left(1 + e'^2\cos^2 A_0 sen^2\omega\right)}senA_0}{\left(1 - \cos^2 A_0 sen^2\omega\right)}\, d\omega$$

2.24.7 Integración del arco (geodésica distinta del ecuador)

Si efectuamos la substitución $t^2 = e'^2 \cos^2 A_0$, resulta

$$ds = b\sqrt{\left(1+t^2 sen^2\omega\right)}d\omega$$

El desarrollo por la fórmula del binomio del radical es

$$\left(1+t^2 sen^2\omega\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}t^2 sen^2\omega - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 sen^4\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 sen^6\omega - ...$$

Llamando $x = t^2 sen^2\omega$,

$$\left(1+t^2 sen^2\omega\right)^{1/2} = (1+x)^{1/2} = \binom{1/2}{0} + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \binom{1/2}{4}x^4 + ...$$

$$\binom{1/2}{0} = 1 \qquad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2} \qquad \binom{1/2}{2} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}$$

$$\binom{1/2}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} \qquad \binom{1/2}{4} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)}{3!} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{5}{8}$$

La longitud del arco de geodésica desde el ecuador a un punto definido por ω

$$s = b\int_0^\omega \left(1+t^2 sen^2\omega\right)^{\frac{1}{2}} d\omega = b\int_0^\omega (1+\frac{1}{2}t^2 sen^2\omega - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 sen^4\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 sen^6\omega - ...)d\omega$$

$$s = b(\int_0^\omega d\omega + \frac{1}{2}\int_0^\omega t^2 sen^2\omega d\omega - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\int_0^\omega t^4 sen^4\omega d\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\int_0^\omega t^6 sen^6\omega d\omega - ...)$$

J.J. Levalois llama integrales de Wallis a

$$W_{2p} = \int_0^\omega sen^{2p}\omega d\omega$$

Usando esta notación

$$s = b(W_0 + \frac{1}{2}t^2 W_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 W_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 W_6 - ...)$$

Las integrales W verifican la siguiente relación de recurrencia:

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} - \frac{1}{n} sen^{n-1}\omega \cos\omega$$

en efecto:

$$W_n = \int_0^{\omega} sen^n \omega d\omega = \int_0^{\omega} sen^{n-2}\omega sen^2 \omega d\omega = \int_0^{\omega} sen^{n-2}\omega (1-\cos^2\omega) d\omega$$

$$W_n = \int_0^{\omega} sen^{n-2}\omega (1-\cos^2\omega) d\omega = \int_0^{\omega} sen^{n-2}\omega d\omega - \int_0^{\omega} sen^{n-2}\omega \cos^2\omega d\omega$$

Integrado por partes el segundo sumando

$$u = \frac{sen^{n-1}\omega}{n-1} \qquad du = sen^{n-2}\omega \cos\omega d\omega \qquad v = \cos\omega \qquad dv = -sen\omega d\omega$$

$$W_n = W_{n-2} - \frac{sen^{n-1}\omega}{n-1}\cos\omega - \frac{1}{n-1}\int sen^n \omega d\omega = W_{n-2} - \frac{sen^{n-1}\omega}{n-1}\cos\omega - \frac{1}{n-1} W_n$$

$$(1-\frac{1}{n-1})W_n = \frac{n}{n-1} W_n = W_{n-2} - \frac{sen^{n-1}\omega \cos\omega}{n-1}$$

Aplicando la relación de recurrencia, resulta:

$$W_0 = \omega$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\left(\omega - sen\omega \cos\omega\right)$$

$$W_4 = \frac{3}{4} W_2 - \frac{1}{4} sen^2\omega (sen\omega \cos\omega)$$

$$W_6 = \frac{5}{6} W_4 - \frac{1}{6} sen^4\omega \left(sen\omega \cos\omega\right)$$

$$\boxed{s = b(W_0 + \frac{1}{2}t^2 W_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 W_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 W_6 - ...)}$$

En la mayor parte de las aplicaciones difícilmente se pasa del grado 6.

En el caso del ecuador:

$$s = a\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)$$

2.24.8 Longitud del arco de meridiano entre el ecuador y un punto de latitud reducida ψ (Fórmula de Levallois)

Cuando se trata del meridiano $A_0 = 0$ y la fórmula $t^2 = e'^2 \cos^2 A_0$ se reduce a $t^2 = e'^2$

$$s_{meridiano} = b(W_{0m} + \frac{1}{2}e'^2 W_{2m} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}e'^4 W_{4m} + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}e'^6 W_{6m} - ...)$$

como $sen\psi = \cos A_0 sen\omega \Rightarrow sen\psi = sen\omega \Rightarrow \psi = \omega$

$$W_{0m} = \psi$$

$$W_{2m} = \frac{1}{2}\left(\psi - sen\psi \cos\psi\right)$$

$$W_{4m} = \frac{3}{4}W_2 - \frac{1}{4}sen^2\psi(sen\psi \cos\psi)$$

$$W_{6m} = \frac{5}{6}W_4 - \frac{1}{6}sen^4\psi\left(sen\psi \cos\psi\right)$$

2.24.9 Longitud del arco de meridiano entre el ecuador y un punto de latitud geodésica φ

La fórmula clásica resulta de la integración de

$$s = \int_0^{\varphi} \rho d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^{3/2}} d\varphi = \int_0^{\varphi} a\left(1-e^2\right)\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^{-\frac{3}{2}} d\varphi$$

desarrollando por fórmula del binomio

$$\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^{-3/2} = \binom{-3/2}{0} + \binom{-3/2}{1}(-e^2 sen^2\varphi) + \binom{-3/2}{2}(-e^2 sen^2\varphi)^2 + \binom{-3/2}{3}(-e^2 sen^2\varphi)^3 + ...$$

$$\binom{-3/2}{0} = 1 \qquad \binom{-3/2}{1} = -\frac{3}{2} \qquad \binom{-3/2}{2} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2} = \frac{15}{8}$$

$$\binom{-3/2}{3}=\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}-2\right)}{3.2}=-\frac{105}{48}$$

$$s=a.\left(1-e^2\right)\int_0^{\varphi}(1+\frac{3}{2}e^2sen^2\varphi+\frac{15}{8}e^4sen^4\varphi+\frac{105}{48}e^6sen^6\varphi+...)d\varphi$$

Teniendo en cuenta las fórmulas de de Moivre

$$sen^2\varphi=\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\qquad sen^4\varphi=\frac{3-4\cos 2\varphi+4\cos 4\varphi}{8}$$

$$sen^6=\frac{10-15\cos 2\varphi+6\cos 4\varphi-6\cos 6\varphi}{32}$$

Integrando término a término hasta los de e^6, resulta

$$s=a(1-e^2)(B_0\varphi-\frac{1}{2}B_1sen2\varphi+\frac{1}{4}B_3sen4\varphi-\frac{1}{6}B_4sen6\varphi+...)$$

$$B_0=1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6$$

$$B_1=\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6$$

$$B_2=\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6$$

$$B_3=\frac{35}{512}e^6$$

Esta es la fórmula clásica en función de los senos de los múltiplos de la latitud.

2.24.10 Cálculo de la longitud λ en función de ω

La fórmula

$$d\lambda = \frac{b}{a}\frac{(1+e'^2\cos^2 A_0 sen^2\omega)^{1/2} senA_0}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}d\omega$$

con la substitución $t^2 = e'^2\cos^2 A_0$, se convierte en

$$d\lambda = \frac{b}{a}senA_0\frac{\left(1+t^2 sen^2\omega\right)^{1/2}}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}d\omega$$

Integrado resulta

$$\lambda = \frac{b}{a}senA_0\int_0^{\omega}\frac{\left(1+t^2 sen^2\omega\right)^{1/2}}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}d\omega$$

Sustituyendo el numerador del integrando por su desarrollo en serie

$$\lambda = \frac{b}{a}senA_0\int_0^{\omega}\frac{1+\frac{1}{2}t^2 sen^2\omega - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 sen^4\omega + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 sen^6\omega - \ldots}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}d\omega$$

$$\lambda = \frac{b}{a}senA_0\left[\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}+\frac{1}{2}t^2\int_0^{\omega}\frac{sen^2\omega d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}- \\ \displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4\int_0^{\omega}\frac{sen^4\omega d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6\int_0^{\omega}\frac{sen^6\omega d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}-\ldots\end{array}\right]$$

$$\lambda = \frac{b}{a}senA_0\left[I_0 + \frac{1}{2}t^2 I_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4 I_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6 I_6 + \ldots\right]$$

Las integrales I_{2p} verifican la relación de recurrencia

$$I_{2p} = W_{2p} + \cos^2 A_0 I_{2p+2}$$

En efecto:

$$I_{2p} = \int_0^{\omega}\frac{sen^{2p}\omega d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega} = \int_0^{\omega}\frac{sen^{2p}\omega\left(1-\cos^2 A_0 sen^2\omega + \cos^2 A_0 sen^2\omega\right)}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}d\omega$$

$$I_{2p} = \int_0^{\omega} sen^{2p}\omega d\omega + \cos^2 A_0\int_0^{\omega}\frac{sen^{2p+2}\omega d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega}$$

Aplicando la relación de recurrencia:

$$I_0 = I_0$$

$$I_2 = \frac{I_0 - W_0}{\cos^2 A_0}$$
$$I_4 = \frac{I_2 - W_2}{\cos^2 A_0} = \frac{I_0 - W_0}{\cos^4 A_0} - \frac{W_2}{\cos^2 A_0}$$
$$I_6 = \frac{I_0 - W_0}{\cos^6 A_0} - \frac{W_2}{\cos^4 A_0} - \frac{W_4}{\cos^2 A_0}$$

La expresión de la longitud se escribe

$$\lambda = \frac{b}{a} senA_0 \left[\begin{array}{l} I_0 + \frac{1}{2} t^2 \left(\frac{I_0 - W_0}{\cos^2 A_0} \right) - \frac{1}{2}\frac{1}{4} t^4 \left(\frac{I_0 - W_0}{\cos^4 A_0} - \frac{W_2}{\cos^2 A_0} \right) \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} t^6 \left(\frac{I_0 - W_0}{\cos^6 A_0} - \frac{W_2}{\cos^4 A_0} - \frac{W_4}{\cos^2 A_0} \right) - \ldots \end{array} \right]$$

Como $t^2 = e'^2 \cos^2 A_0$

$$\lambda = \frac{b}{a} senA_0 \left[\begin{array}{l} I_0 + \frac{1}{2} e'^2 \left(I_0 - W_0 \right) - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e'^4 \left(I_0 - W_0 - W_2 \cos^2 A_0 \right) \\ + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 \left(I_0 - W_0 - W_2 \cos^2 A_0 - W_4 \cos^4 A_0 \right) - \ldots \end{array} \right]$$

después de reordenar, resulta:

$$\lambda = \frac{b}{a} senA_0 \left[\begin{array}{l} I_0 \left(1 + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e'^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 - \ldots \right) + W_0 \left(\frac{1}{2} e'^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e'^4 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 + \ldots \right) \\ + W_2 \cos^2 A_0 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4} e'^4 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 + \ldots \right) + W_4 \cos^2 A_0 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 + \ldots \right) + \ldots \end{array} \right]$$

$$\lambda = \frac{b}{a} senA_0 \left[M.I_0 + C_0 W_0 + C_2 W_2 \cos^2 A_0 + C_4 W_4 \cos^2 A_0 + \ldots. \right]$$

$$M = 1 + \frac{1}{2} e'^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4} e'^4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6} e'^6 - \ldots = (1 + e'^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{b}{a} = \left(1 - e^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$M.\frac{b}{a} = 1 \qquad B_0 = \frac{b}{a} C_0 \qquad B_2 = \frac{b}{a} C_2 \qquad B_4 = \frac{b}{a} C_4$$

$$\lambda = senA_0.I_0 + senA_0 \left[B_0 W_0 + B_2 W_2 \cos^2 A_0 + B_4 W_4 \cos^4 A_0 + \ldots \right]$$

$$\lambda = senA_0.I_0 + senA_0 \left[\sum_0 B_{2p} W_{2p} \cos^{2p} A_0 \right]$$

El primer sumando se escribe

$$senA_0.I_0 = senA_0\int_0^{\omega}\frac{d\omega}{1-\cos^2 A_0 sen^2\omega} = senA_0\int_0^{\omega}\frac{\dfrac{d\omega}{\cos^2\omega}}{\dfrac{1}{\cos^2\omega}-\cos^2 A_0\tan^2\omega}$$

$$senA_0.I_0 = \int_0^{\omega}\frac{d\left(senA_0\tan\omega\right)}{1+sen^2 A_0\tan^2\omega} = \arctan(senA_0\tan\omega)$$

Llamando

$$-\varepsilon = senA_0\left[\sum_0 B_{2p}W_{2p}\cos^{2p}A_0\right]$$

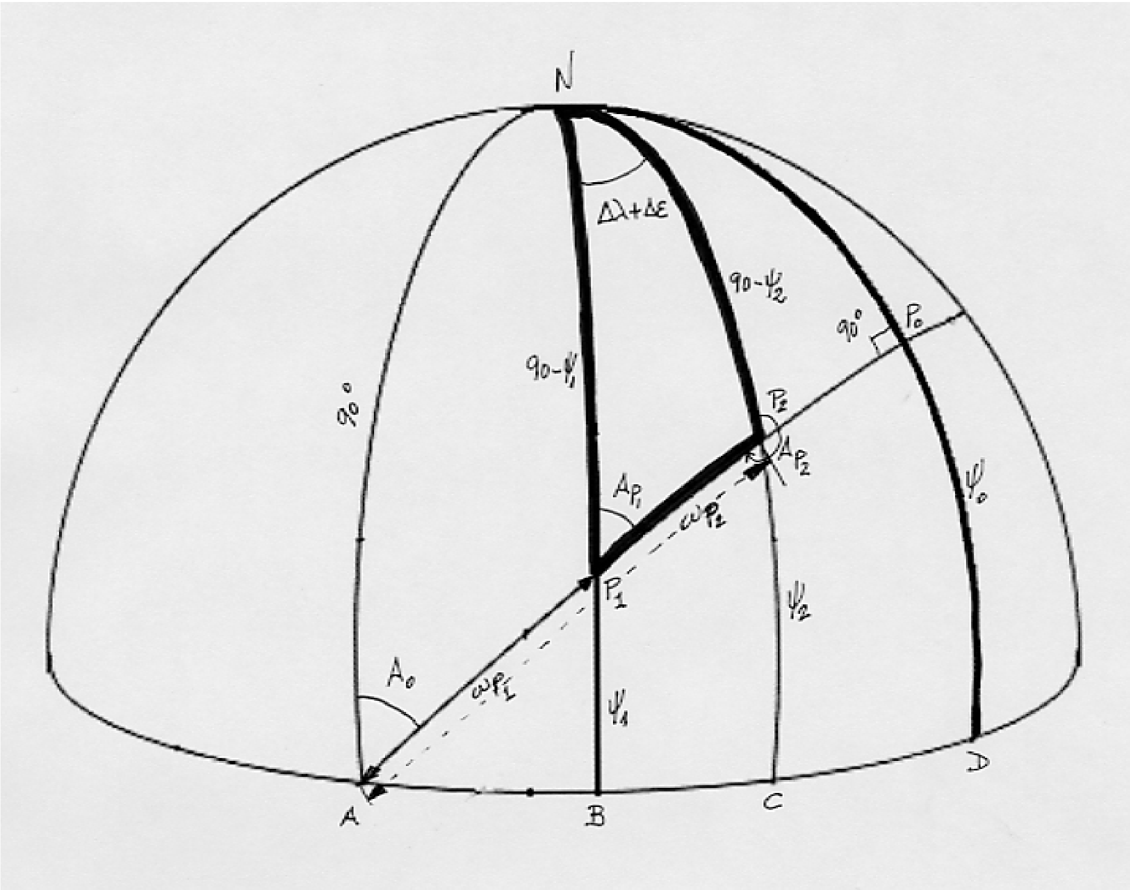
La expresión de la longitud adopta la forma:

$$\lambda+\varepsilon = \arctan(senA_0\tan\omega)$$

$$\tan(\lambda+\varepsilon) = senA_0\tan\omega$$

considerando esta expresión en la esfera principal, resulta la coincidencia de los dos valores de ε.

2.25 Elementos del triángulo polar sobre la esfera



Las latitudes paramétricas(elipsoide): ψ_1 y ψ_2

Las elongaciones geodésicas(esfera): ω_{P1} y ω_{P2}

Los acimutes (esfera y elipsoide): A_{P1} y A_{P2}

Las longitudes (esfera): $\lambda_{P1} + \varepsilon_{P1}$ y $\lambda_{P2} + \varepsilon_{P2}$

La solución de este triángulo esférico resuelve tanto el problema directo como el inverso. Aunque no es precisamente un problema trivial. Las distintas soluciones, fruto de 150 años de trabajo, se diferencian en la forma de determinar los elementos: $\Delta\varepsilon$ y s.

2.26 Problema Inverso Solución de J.J. Levallois y Du Puy.

$$\varepsilon = -senA_0 \left[\sum_0 B_{2p} W_{2p} \cos^{2p} A_0 \right]$$

La longitud del arco de geodésica

$$s = b(W_0 + \frac{1}{2}t^2W_2 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}t^4W_4 + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{3}{6}t^6W_6 - ...) \qquad t^2 = e'^2 \cos^2 A_0$$

2.27 Problema Inverso. Solución iterativa de Helmert modificada por Sodano.

Designando por

$$L = (\lambda_{P2} + \varepsilon_{p2}) - (\lambda_{P1} + \varepsilon_{p1}) = \Delta\lambda + \Delta\varepsilon$$

el ángulo en N, diferencia de longitudes esféricas, se determina por un procedimiento iterativo este valor con la ayuda de un punto auxiliar P_0.

P_0 es el punto donde la geodésica de la esfera alcanza su latitud máxima, que se corresponde con un punto del elipsoide de latitud reducida ψ_0.

El triángulo A N P_0 tiene dos lados AN = A P_0 = 90º, y el ángulo en P_0 también es recto.

1. Cálculo de las latitudes reducidas.

$$\tan\psi_1 = \frac{b}{a}\tan\varphi_1 \qquad \tan\psi_2 = \frac{b}{a}\tan\varphi_2$$

2. Se inicia el proceso iterativo con un valor inicial de $L = \Delta\lambda$, calculándose cada vez un nuevo valor de L con la ayuda de las fórmulas siguientes hasta que no se produzcan cambios significativos de L.

Llamando Φ_0 al arco P_1P_2 correspondiente al valor actual de L, resulta

$$\cos\Phi_0 = sen\psi_1 sen\psi_2 + \cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos L$$

aplicando el teorema del coseno en el triángulo P_1NP_2.

$$sen\Phi_0 = (signo\Delta\lambda)\sqrt{1 - \cos^2\Phi_0}$$

$$sen2\Phi_0 = 2sen\Phi_0 \cos\Phi_0$$

$$sen3\Phi_0 = 3.sen\Phi_0 - 4sen^3\Phi_0$$

Aplicando el teorema de los senos en los triángulos P_1NP_0, P_2NP_0 y P_1NP_2

$$\cos\psi_0 = \cos\psi_1 senA_{P1} = \cos\psi_2 senA_{P2} \qquad \cos\psi_2 senL = sen\Phi_0 senA_{P1}$$

$$\cos\psi_0 = \cos\psi_1 \cos\psi_2 senL / sen\Phi_0$$

Llamando $\quad 2\sigma_m = \omega_{P1} + \omega_{P2} \qquad \sigma = \omega_{P2} - \omega_{P1}$

$$\cos 2\sigma_m = \cos(\omega_{P1} + \omega_{P2}) = \cos\omega_{P2} \cos\omega_{P1} - sen\omega_{P2} sen\omega_{P1}$$

$$\cos\sigma = \cos(\omega_{P2} - \omega_{P1}) = \cos\omega_{P2} \cos\omega_{P1} + sen\omega_{P2} sen\omega_{P1}$$

$$\cos 2\sigma_m + \cos\sigma = 2\cos\omega_{P1} \cos\omega_{P2}$$

$$\cos 2\sigma_m = 2\frac{sen\psi_1 sen\psi_2}{\cos^2 A_0} - \cos\Phi_0$$

$$\cos 4\sigma_m = -1 + 2\cos^2\sigma_m$$

$$\Delta L = \cos\psi_0 \left(A.\Phi_0 - B.sen\Phi_0 \cos 2\sigma_m + C.sen2\Phi_0 \cos 4\sigma_m \right)$$

$$A = \frac{e^2 e'}{e + e'} - \frac{e^2 e'^2}{16} sen^2\psi_0 + \frac{3e^2 e'^4}{128} sen^4\psi_0$$

$$B = \frac{e^2 e'^2}{16} sen^2\psi_0 - \frac{e^2 e'^4}{32} sen^4\psi_0$$

$$C = \frac{e^2 e'^4}{256} sen^4\psi_0$$

3. Una vez calculado un valor de L satisfactorio, se calcula s por

$$s = b\left(B_0\Phi_0 + B_2 sen\Phi_0 \cos 2\sigma_m + B_4 sen2\Phi_0 \cos 4\sigma_m + B_6 sen3\Phi_0 \cos 6\sigma_m \right)$$

$$B_0 = 1 + \frac{e'^2}{4} sen^2\psi_0 - \frac{3e'^4}{64} sen^4\psi_0 + \frac{5e'^6}{256} sen^6\psi_0$$

$$B_2 = \frac{e'^2}{4} sen^2\psi_0 - \frac{e'^4}{16} sen^4\psi_0 + \frac{15e'^6}{512} sen^6\psi_0$$

$$B_4 = \frac{e'^4}{128} sen^4\psi_0 - \frac{3e'^6}{512} sen^6\psi_0$$

$$B_6 = \frac{e'^6}{1536} sen^6\psi_0$$

y los acimutes por:

$$\cot A_{P1} = \frac{\tan\psi_2 \cos\psi_1 - \cos L sen\psi_1}{senL}$$

$$\cot A_{P2} = \frac{\cos L sen\psi_2 - \tan\psi_1 \cos\psi_2}{senL}$$

2.28 Problema directo. Método de E. Sodano.

El punto de partida son las fórmulas de Helmert. Mediante unos desarrollos en series de potencias, que incluyen hasta los términos de grado seis en la excentricidad del elipsoide, se eliminan las iteraciones del método de Helmert.

El método se adapta bien al cálculo electrónico y se consigue una exactitud de hasta diez decimales en el acimut y la distancia expresados en radianes. La solución es adecuada tanto para líneas muy cortas como para las grandes líneas que pueden extenderse hasta un hemisferio.

Si L es la diferencia de longitudes en la esfera y $\Delta\lambda$ la diferencia de longitudes en el elipsoide

$$L = \Delta\lambda + \Delta\varepsilon$$

se consigue la eliminación del proceso iterativo sustituyendo las fórmulas de Helmert por desarrollos en serie de $\Delta\varepsilon$, que es un infinitésimo, teniendo en cuenta la igualdad anterior.

La deducción de las fórmulas está publicada en el Bulletin Geodésique: "A rigorous non-iterative procedure for rapid inverse solution of very long geodesics". Emanuel Sodano. B.G nº 47-48 pp 13 - 25. 1958.

Algoritmo:

Datos: $\varphi_1 \ \lambda_1 \ A_{P1}$ s.

Incógnitas: $\varphi_2 \ \lambda_2 \ A_{P2}$

Latitud reducida P_1: $\tan\psi_1 = \frac{b}{a}\tan\varphi_1$

Latitud reducida P_0: $\cos\psi_0 = \cos\psi_1 sen A_{P1}$ $\quad g = \cos\psi_1 \cos A_{P1}$

$$m_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2} sen^2\psi_1\right)\left(1 - \cos^2\psi_0\right)$$

$\phi_s = \dfrac{s}{b}$ radianes

$$a_1 = \left(1 + \frac{e'^2}{2} sen^2\psi_1\right)\left(sen^2\psi_1 \cos\phi_s + g.sen\psi_1 sen\phi_s\right)$$

$$\phi_0 = \phi_s + a_1\left(-\frac{e'^2}{2} sen\phi_s\right) + m_1\left(-\frac{e'^2}{4}\phi_s + \frac{e'^2}{4} sen\phi_s \cos\phi_s\right) +$$
$$a_1^2\left(\frac{5e'^4}{8} sen\phi_s \cos\phi_s\right) + m_1^2\left(\frac{11e'^4}{64}\phi_s - \frac{13e'^4}{64} sen\phi_s \cos\phi_s - \frac{e'^4}{8}\phi_s \cos^2\phi_s + \frac{5e'^4}{32} sen\phi_s \cos^3\phi_s\right) +$$
$$a_1 m_1\left(\frac{3e'^4}{8} sen\phi_s + \frac{e'^4}{4}\phi_s \cos\phi_s - \frac{5e'^4}{8} sen\phi_S \cos^2\phi_S\right)$$

Arco distinto del meridiano, $A_{P1} = 0$

$$\boxed{\cot A_{P2} = \left(g\cos\phi_0 - sen\psi_1 sen\phi_0\right)/\cos\psi_0}$$

Cuando se trate de un arco de meridiano, $A_{P2} = 0$ y el signo es el del numerador de la fórmula anterior.

$$\cot L = \left(\cos\psi_1 \cos\phi_0 - sen\psi_1 sen\phi_0 \cos A_{P1}\right)/\left(sen\phi_0 sen A_{P1}\right)$$

$$\Delta\lambda = L + \cos\psi_0\left(-f\phi_s + a_1\left(\frac{3f^2}{2} sen\phi_s\right) + m_1\left(\frac{3f^2}{4}\phi_s - \frac{3f^2}{4} sen\phi_s \cos\phi_s\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda}$$

$$sen\psi_2 = sen\psi_1 \cos\phi_0 + g.sen\phi_0 \qquad \cos\psi_2 = +\sqrt{\cos^2\psi_0 + \left(g\cos\phi_0 - sen\psi_1 sen\phi_0\right)^2}$$

$$\tan\psi_2 = \frac{sen\psi_2}{\cos\psi_2}$$

$$\boxed{\tan\varphi_2 = \frac{a}{b}\tan\psi_2}$$

2.29 *Problema inverso. Fórmulas de Sodano.*

Algoritmo:

Datos: $\varphi_1 \;\; \lambda_1 \;\; \varphi_2 \;\; \lambda_2$

Incógnitas: $A_{P2} \;\; A_{P1}$ s.

Latitud reducida P_1: $\tan\psi_1 = \frac{b}{a}\tan\varphi_1$

Latitud reducida P_2: $\tan\psi_2 = \frac{b}{a}\tan\varphi_2$

Diferencia de longitudes: $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$

$$\cos\Phi = sen\psi_1 sen\psi_2 + \cos\psi_1\cos\psi_2\cos\Delta\lambda$$

$$sen\Phi = \sqrt{\left(\cos\psi_2 sen\Delta\lambda\right)^2 + \left(sen\psi_2\cos\psi_1 - sen\psi_1\cos\psi_2\cos\Delta\lambda\right)^2}$$

$$c = \cos\psi_1\cos\psi_2 sen\Delta\lambda / sen\Phi$$

$$a_1 = sen\psi_1 sen\psi_2 \qquad\qquad m_1 = 1 - c^2$$

Distancia s:

$$\boxed{s = b\left\{\begin{array}{l} \left(1+f+f^2\right)\Phi + a_1\left(\left(f+f^2\right)sen\Phi - \frac{f^2}{2}\Phi^2\csc\Phi\right) + \\ m_1\left(-\frac{\left(f+f^2\right)}{2}\Phi - \frac{\left(f+f^2\right)}{2}sen\Phi\cos\Phi + \frac{f^2}{2}\Phi^2\cot\Phi\right) + \\ a_1^2\left(-\frac{f^2}{2}sen\Phi\cos\Phi\right) + m_1^2\left(\frac{f^2}{16}\Phi + \frac{f^2}{16}sen\Phi\cos\Phi - \frac{f^2}{2}\Phi^2\cot\Phi - \frac{f^2}{8}sen\Phi\cos^3\Phi\right) + \\ a_1 m_1\left(\frac{f^2}{2}\Phi^2\csc\Phi + \frac{f^2}{2}sen\Phi\cos^2\Phi\right) \end{array}\right\}}$$

$$L = \Delta\lambda + c\left(\begin{array}{l} \left(f+f^2\right)\Phi + a_1\left(-\frac{f^2}{2}sen\Phi - f^2\Phi^2\csc\Phi\right) + \\ m_1\left(-\frac{5f^2}{4}\Phi + \frac{f^2}{4}sen\Phi\cos\Phi + f^2\Phi^2\cot\Phi\right) \end{array}\right)$$

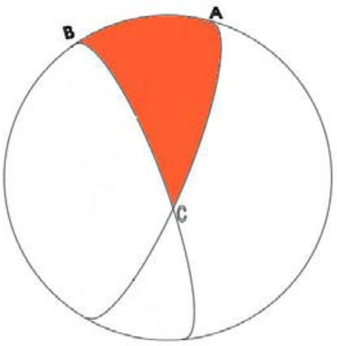
Acimutes:

$$\boxed{\cot A_{P2} = \frac{sen\psi_2 \cos\psi_1 \cos L - sen\psi_1 \cos\psi_2}{senL \cos\psi_1}}$$

$$\boxed{\cot A_{P1} = \frac{sen\psi_2 \cos\psi_1 - \cos L sen\psi_1 \cos\psi_2}{senL \cos\psi_2}}$$

2.30 Cálculo de una triangulación en el elipsoide

Cálculos en la esfera.



2.30.1Exceso esférico de un triángulo.

Dado el triángulo esférico de vertices A,B,C y cuyos ángulos, expresados en radianes, son respectivamente A,B y C. Se denomina exceso esférico a

$$\varepsilon = A + B + C - \pi$$

El exceso esférico es proporcional al área del triángulo e inversamente proporcional al cuadrado del radio de la esfera a la que pertenece.

Consideremos el hemisferio visible y las áreas de los sectores de vértices A, B y C.

Sector esférico A: Área $S_A = 2.A.R^2$

Sector esférico B: Área $S_B = 2.B.R^2$

Sector esférico C: Área $S_C = 2.C.R^2$

Sumando estas áreas resulta el área del hemisferio $2\pi R^2$ más dos veces el área del triángulo T.

$$2.A.R^2 + 2.B.R^2 + 2.C.R^2 - 2.T = 2.\pi.R^2$$

$$A + B + C - \pi = \frac{T}{R^2}$$

2.30.2 Teorema de Legendre.

Tanto por su importancia histórica como por la utilidad que puede suponer en determinadas ocasiones, aún hoy, el siguiente teorema, debido a Legendre, permite efectuar los cálculos de un triángulo esférico utilizando la trigonometría plana dentro de un cierto orden de aproximación.

Sean A, B, C los ángulos del triángulo esférico (radianes), a, b y c los lados (expresados en unidades lineales) y R el radio de la esfera, con una aproximación del cuarto orden, el cálculo del triángulo esférico se puede reducir al de un triángulo plano cuyos lados sean a, b y c, cuyos ángulos sean $A-\frac{\varepsilon}{3}$, $B-\frac{\varepsilon}{3}$ y $C-\frac{\varepsilon}{3}$; ε es el exceso esférico del triángulo ABC.

Si $\alpha=\frac{a}{R}$, $\beta=\frac{b}{R}$ y $\gamma=\frac{c}{R}$ son los lados expresados en radianes, el teorema del coseno en el triángulo esférico

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+sen\beta sen\gamma\cos A$$

Desarrollando hasta el cuarto orden se puede escribir

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}$$

$$\cos\beta=1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!} \qquad sen\beta=\beta-\frac{\beta^3}{3!}$$

$$\cos\gamma=1-\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{\gamma^4}{4!} \qquad sen\gamma=\gamma-\frac{\gamma^3}{3!}$$

Sustituyendo los desarrollos en la fórmula del coseno

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}\right)=\left(1-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^4}{4!}\right)\left(1-\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{\gamma^4}{4!}\right)+\left(\beta-\frac{\beta^3}{3!}\right)\left(\gamma-\frac{\gamma^3}{3!}\right)\cos A$$

$$1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}=1-\frac{\gamma^2}{2!}+\frac{\gamma^4}{4!}-\frac{\beta^2}{2!}+\frac{\beta^2\gamma^2}{2!2!}-\frac{\beta^2\gamma^4}{2!4!}+\frac{\beta^4}{4!}-\frac{\beta^4\gamma^2}{2!4!}+\frac{\beta^4\gamma^4}{4!4!}$$
$$+\left(\beta\gamma-\frac{\beta\gamma^3}{3!}-\frac{\gamma\beta^3}{3!}+\frac{\beta^3\gamma^3}{3!3!}\right)\cos A$$

Para buscar una relación entre α,β,γ limitándonos a los términos de segundo orden resulta

$$\frac{\alpha^2}{2} = \frac{\beta^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} - \beta\gamma\cos A \qquad\qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$$

Limitándonos a los términos de cuarto orden se puede escribir:

$$-\frac{\alpha^2}{2!} + \frac{1}{4!}\left(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A\right)^2 = -\frac{\gamma^2}{2!} + \frac{\gamma^4}{4!} - \frac{\beta^2}{2!} + \frac{\beta^2\gamma^2}{2!2!} + \left(\beta\gamma - \frac{\beta\gamma^3}{3!} - \frac{\beta^3\gamma}{3!}\right)\cos A$$

$$-\frac{\alpha^2}{2} = -\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^2\gamma^2}{3!} - \frac{\beta^2\gamma^2}{3!}\cos^2 A + \beta\gamma\cos A$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A - \frac{2\beta^2\gamma^2}{3!} sen^2 A$$

Si pasamos a unidades lineales

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(\cos A + \left(\frac{bc}{6R^2} senA\right) senA\right)$$

En el caso del radio terrestre $\qquad dA = \frac{bc}{6R^2} senA$

es infinitesimal, y teniendo en cuenta que, en este caso,

$$\cos(A - dA) \approx \cos A + dAsenA \qquad\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A - \left(\frac{bc}{6R^2} senA\right)\right)$$

pero $\frac{\varepsilon}{3} = \frac{bc}{6R^2} senA \qquad\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A - \frac{\varepsilon}{3}\right)$

Repitiendo el razonamiento resulta el teorema. El limitar los desarrollos a los términos de cuarto orden, limitan la aplicación del teorema a triángulos cuyos lados no pasen de unos 150 Km, que es lo que ocurre con los lados normales de una triangulación clásica. Cuando se trata de lados mayores, caso del enlance España Argelia con lados de unos 300 kms, hay que extender la aproximación a términos de mayor orden en los desarrollos.

2.30.3 Extensión del teorema de Legendre al Elipsoide

Aplicando el Teorema de Gauss sobre la curvatura total de un polígono cerrado en el elipsoide, el resultado de Legendre puede utilizarse igualmente en el elipsoide siempre que se mantenga la limitación en la longitud de los lados anterior. Con todo rigor habría que calcular el exceso esférico teniendo en cuenta el área del triángulo y como radio de la esfera tomar el radio de curvatura medio en el centro del triángulo. La práctica de calcular el exceso a partir de los ángulos observados asegura además la condición de mínima varianza (mmcc) para la solución de un triángulo plano aislado.