Observaciones de fase.

1. Fase batida por la portadora.

1.1 Error de fase de un oscilador.

Sea $\theta(T)$ la fase de un oscilador en una época *T*.

$$\theta(T) = \theta(T_0) + \int_{T_0}^{T} f(t)dt \qquad [1]$$

$\theta(T_0)$ es la fase en una época inicial T_0

$f(t)$ es la frecuencia del oscilador como función del tiempo.

En el caso de un "oscilador perfecto", la frecuencia f_0 es constante en la escala de tiempo considerada, la ecuación [1] adoptará la forma:

$$\theta(T) = \theta(T_0) + f_0(T - T_0) \qquad [2]$$

El oscilador que se utiliza para definir una escala de tiempo es necesariamente un oscilador perfecto.

Si representamos por $\Phi(T)$ la fase de un oscilador situado en el el satélite o en el receptor, este será necesariamente un oscilador imperfecto respecto a la escala de tiempo GPS, determinada por un oscilador diferente situado en el segmento de control. Las marcas de tiempo en el satélite y en el receptor se generan a partir de los correspondientes osciladores, representando por

$$\delta(T) = \frac{1}{f_0}(\Phi(T) - \theta(T)) \qquad [3]$$

el error de fase del oscilador, resulta:

$$\Phi(T) = \theta(T) + f_0\delta(T) \qquad [4]$$

que relaciona la fase del oscilador con los parámetros del oscilador perfecto.

1.2 Fase batida por la portadora (Modelo teórico)

Diferencia de la fase del oscilador local, situado en el receptor, Φ_l *y la fase de la señal recibida* Φ_r*:*

$$\Phi_b = \Phi_l - \Phi_r \qquad [5]$$

Consideremos un receptor j que recibe la señal de un satélite i, sean:

T_j La época de recepción de la señal en el receptor

T_j^i La época de emisión de la señal en el satélite.

τ_j^i El tiempo de recorrido de la señal

$$\tau_j^i = T_j - T_j^i \qquad [6]$$

Teniendo en cuenta que la fase de la señal recibida en la época T_j es la misma que la emitida por el satélite en la época T_j^i.

$$\Phi_{rj}^i(T_j) = \Phi^i(T_j^i) \qquad [7]$$

$$\Phi_{bj}^i(T_j) = \Phi_{lj}(T_j) - \Phi_{rj}^i(T_j) = \Phi_{lj}(T_j) - \Phi^i(T_j^i) \qquad [8]$$

$\Phi_{bj}^i(T_j)$ fase batida en el receptor j, satélite i, época T_j

$\Phi_{lj}(T_j)$ fase del oscilador local j, época T_j

$\Phi_{rj}^i(T_j)$ fase de la señal recibida en el receptor j, satélite i, época T_j

$\Phi^i(T_j^i)$ fase de la señal emitida por el satélite i, en la época T_j^i

Aplicando [4] al oscilador local y al del satélite, resulta:

$$\Phi_{lj}(T_j) = \theta(T_j) + f_0\delta_l(T_j)$$
$$\Phi^i(T_j^i) = \theta(T_j^i) + f_0\delta^i(T_j^i)$$

$$\Phi_{bj}^i(T_j) = \theta(T_j) + f_0\delta_l(T_j) - \theta(T_j^i) - f_0\delta^i(T_j^i)$$

$$\theta(T_j) - \theta(T_j^i) = f_0\tau_j^i(T_j)$$

$$\Phi_{bj}^i(T_j) = f_0\left[\tau_j^i(T_j) + \delta_l(T_j) - \delta^i(T_j^i)\right] \qquad [9]$$

Interpretación del tiempo de recorrido τ_j^i

Puede considerarse como la resultante del tiempo de propagación en el vacío y el tiempo extra causado por la propagación en la atmósfera. La refracción atmosférica produce un cambio en la velocidad de propagación de la señal, que puede interpretarse como: un retardo temporal, un adelanto en la fase o un incremento de la distancia receptor satélite.

$f_0\tau_j^i = f_0\rho_j^i(T_j)/c + \Delta\Phi_{atmos}$ $\rho_j^i(T_j)$ es la distancia receptor satélite en el vacío

En unidades de frecuencia, la fase batida [9] se escribe:

$$\Phi_{bj}^i(T_j) = f_0\left[\tau_j^i(T_j) + \delta_l(T_j) - \delta^i(T_j^i)\right] = \left(\frac{f_0}{c}\right)\rho_j^i(T_j) + f_0\left(\delta_l(T_j) - \delta^i(T_j^i)\right) + \Phi_{atmos} \quad [10]$$

En unidades métricas, teniendo en cuenta que $\lambda = \dfrac{c}{f_0}$,

$$\phi_{bj}^i(T_j) = \rho_j^i(T_j) + c\left(\delta_l(T_j) - \delta^i(T_j^i)\right) + \lambda\phi_{atmos} \quad [11]$$

1.3 Fase batida por la portadora (Modelo físico).

En el modelo teórico anterior no se ha tenido en cuenta el receptor real, en el que hay que incorporar un término más el ruido, $\Delta\Phi_{ruidc}$, que introduce la electrónica del receptor y modificar las ecuaciones [10] y [11] para adecuarlas al modo en que se reliza la medida de la fase.

Cuando el receptor j adquiere el satélite i, el contador del número entero de ciclos se pone a un valor arbitrario $C_R(T_j)$ y se inicia la medida de la fracción de ciclos $\Phi_{fj}^{i}(T_j)$. Como consecuencia aparece una nueva incógnita N_j^i, ambigüedad en el receptor j para el satélite i, que representa el número entero de ciclos (o longitudes de onda) correspondiente a la distancia receptor-satélite en el momento en que se inicia el contador, en el supuesto que este se inicie con el valor cero. Este valor de la ambigüedad permanecerá constante mientras se mantenga el seguimiento del satélite. Si se produce una pérdida de sincronización, se producirá un salto de ciclos (cycle slip) $S(T_j)$. La ecuación [10] se escribirá:

$$\Phi_{bj}^i(T_j) = \Phi_{fj}^i(T_j) + C_R(T_j) + S(T_j) = N_j^i + (f_0/c)\rho_j^i(T_j) + f_0\left(\delta r(T_j) - \delta^i(T_j)\right) + \Delta\Phi_{atmos} + \Delta\Phi_{ruido}$$
[12]

Análogamente se estable la ecuación correspondiente a la [11].

Las medidas de fase se registran en épocas igualmente espaciadas (cada segundo, cada diez segundos, ...) EN LA ESCALA DE TIEMPO DE CADA RECEPTOR.

La variación de la fase batida en el receptor es consecuencia de la variación de la distancia receptor-satélite combinada con el efecto doppler que resulta del movimiento relativo del emisor y el receptor.

La fase batida se puede medir instrumentalmente con una resolución expresada en distancia del orden del milimetro. El error dominante en la medida de fase es debido al comportamiento de los relojes del receptor y el satélite.

Si en una época determinada T_j se observan, por ejemplo, 8 satélites por cada uno hay que introducir una incógnita de ambigüedad. La posición y el estado del reloj suponen cuatro incógnitas más. En total hay doce incógnitas y ocho observaciones, no es posible obtener una solución con observaciones de fase para una sola época *Tj*. Habrá que considerar un número suficiente de épocas para disponer de más observaciones que incógnitas, SIEMPRE QUE EL VALOR DE TODAS LAS AMBIGÜEDADES PERMANEZCA CONSTANTE DURANTE EL PERÍDO CONSIDERADO.

La posibilidad de determinar los valores enteros de las ambigüedades presupone que los errores de las efemérides, de propagación y el ruido de los receptores son pequeños comparado con un ciclo (19 cm en L1 y 24 cm en L2).

Los saltos de ciclos son pequeños cuando están causados por una baja relación señal ruido en el receptor, cuando proceden del centelleo ionosférico y pueden alcanzar millares de ciclos cuando el origen es una obstrucción de la señal procedente del satélite en el entorno del receptor. Debe observarse que las pérdidas de ciclos son siempre un número entero de ciclos, ya que aunque se pierda la sincronización, la medida de la fracción de ciclo sigue siendo correcta. Algunos receptores intentan recuperar los saltos de ciclo durante la medida, todos incluyen una señal de aviso en el registro de observaciones. Esta marca de pérdida de ciclos se traslada también a los archivos RINEX. En general, los saltos de ciclo se eliminan en el preproceso de las observaciones antes de efectuar el cálculo de la solución.

2. Diferencias de fase.

Entre los métodos utilizados para eliminar los sistematismos en las observaciones de fase está la formación de diferencias siempre que el observable dependa linealmente del sistematismo a eliminar. Las diferencias que pueden formarse son:

Entre satélites en un receptor.

Entre receptores con observaciones de un mismo satélite.

Diferencias dobles.

Diferencias triples.

Como se observan dos frecuencias la expresión de la fase [12] toma la forma:

$$\Phi_j^i(T_j) = N_j^i + (1/\lambda_k)\rho_j^i(T_j) + f_k\left(\delta_j(T_j) - \delta^i(T_j)\right) + \Delta\Phi_{atmosj} + \Delta\Phi_{ruidoj}$$

k toma los valores 1 ó 2 según la banda sea L1 o L2.

2.1 Diferencias entre satélites.

El error de fase del receptor j puede eliminarse formando la diferencia de la fase batida por dos satélites l y m que se observen **simultáneamente.**

$$\Phi_j^l(T_j) = N_j^l + (1/\lambda_k)\rho_j^l(T_j) + f_k\left(\delta_j(T_j) - \delta^l(T_j)\right) + \Delta\Phi^l{}_{atmosj} + \Delta\Phi_{ruidoj}$$

$$\Phi_j^m(T_j) = N_j^m + (1/\lambda_k)\rho_j^m(T_j) + f_k\left(\delta_j(T_j) - \delta^m(T_j)\right) + \Delta\Phi^m{}_{atmosj} + \Delta\Phi_{ruidoj}$$

$$\Phi_j^{lm}(T_j) = \Phi_j^m(T_j) - \Phi_j^l(T_j) = \frac{1}{\lambda_k}(\rho_j^m(T_j) - \rho_j^l(T_j)) - f_k(\delta^m(T_j) - \delta^l(T_j)) +$$
$$N_j^m - N_j^l + \Delta(\Phi_{atmj}^m - \Phi_{atmj}^l) + \Delta\Phi'_{ruido}$$

El nuevo observable $\Phi_j^{lm}(T_j)$ no depende del error de fase del receptor, la diferencia de la influencia de la atmósfera puede llegar a ser nula en determinadas circunstancias y el ruido lógicamente será mayor.

2.2 Diferencias entre receptores.

Si desde dos receptores j y m se observa al mismo satélite i **simultáneamente,** la diferencia de fase

$$\Phi^i_{jm}(t) = \Phi^i_m(T_m) - \Phi^i_j(T_j)$$

permite eliminar el error del oscilador del satélite y atenuar los errores de las efemérides.

$$\Phi^i_m(T_m) = N^i_m + \frac{1}{\lambda_k}\rho^i_m(T_m) + f_k(\delta_m(T_m) - \delta^i(T^i_m)) + \Delta\Phi_{atmosm} + \Delta\Phi_{ruidom}$$

$$\Phi^i_j(T_j) = N^i_j + \frac{1}{\lambda_k}\rho^i_m(T_j) + f_k(\delta_m(T_j) - \delta^i(T^i_j)) + \Delta\Phi_{atmosj} + \Delta\Phi_{ruidoj}$$

$$\Phi^i_{jm}(t) = \frac{1}{\lambda_k}\left(\rho^i_m(T_m) - \rho^i_j(T_j)\right) + f_k\left(\delta_m(T_m) - \delta_j(T_j)\right) - f_k\left(\delta^i(T^i_m) - \delta^i(T^i_j)\right) + N^i_m - N^i_j +$$
$$\Delta(\Phi_{atmosm} - \Phi_{atmosj}) + \Delta\Phi'_{ruido}$$

T_m tiempo nominal en el receptor m.

T_j tiempo nominal en el receptor j. Tiempo nominal: tiempo registrado en el receptor.

La igualdad $T_m = T_j$ hace referencia a los tiempos nominales, no implica la simultaneidad como consecuencia de los errores de los relojes. Los tiempos T^i_m y T^i_j dependen de la distancia de cada receptor al satélite. Cuando la diferencia de distancias $\left|\rho^i_m(T_m) - \rho^i_j(T_j)\right| \geq 300$ km, esta diferencia de tiempo alcanza el milisegundo.

Dada la estabilidad de los osciladores situados en los satélites, rubidio y cesio, se supone que

$$\delta^i(T^i_m) = \delta^i(T^i_j)$$

resultando:

$$\Phi^i_{jm}(t) = \frac{1}{\lambda_k}\left(\rho^i_m(T_m) - \rho^i_j(T_j)\right) + f_k\left(\delta_m(T_m) - \delta_j(T_j)\right) + N^i_m - N^i_j + \Delta(\Phi_{atmosm} - \Phi_{atmosj}) + \Delta\Phi'_{ruido}$$

Si las distancias no son muy grandes, los errores atmosféricos y los de las efemérides tienden a cancelarse.

2.3 Dobles diferencias.

Si combinamos las dos diferencias anteriores, para dos estaciones i,j y dos satélites l,m, se puede escribir:

$$\Phi_{ij}^{m}(t)=\frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m(T_j)-\rho_i^m(T_i)\right)+f_k\left(\delta_j(T_j)-\delta_i(T_i)\right)+N_j^m-N_i^m+\Delta\Phi_{atmos}+\Delta\Phi_{ruido}$$

$$\Phi_{ij}^{l}(t)=\frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^l(T_j)-\rho_i^l(T_i)\right)+f_k\left(\delta_j(T_j)-\delta_i(T_i)\right)+N_j^l-N_i^l+\Delta\Phi_{atmos}+\Delta\Phi_{ruido}$$

$$\Phi_{ij}^{lm}(t)=\frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m(T_j)-\rho_i^m(T_i)-\rho_j^l(T_j)+\rho_i^l(T_i)\right)+N_j^m-N_i^m-N_j^l+N_i^l+\Delta^2\Phi_{atm}+\Delta^2\Phi_{ruido}$$

Teniendo en cuenta las puntualizaciones anteriores, han desaparecido las incógnitas de los errores de los osciladores tanto en los satélites como en los receptores, por lo menos hasta el primer orden. La influencia de errores de las efemérides y de la atmósfera puede incluso anularse en determinadas circunstancias. Hay que tener muy presente que los observables se registran a intervalos regulares marcados por los relojes de cada receptor, las dobles diferencias eliminan el error de los osciladores de los receptores pero no los errores de las marcas de tiempo de cada observación. Cuando se quiera garantizar la simultaneidad habrá que trasladar las observaciones a una escala de tiempo común a los dos receptores, para lo cual hay que determinar con la ayuda de las pseudodistancias, los errores de los relojes de cada receptor respecto al tiempo GPS. Para garantizar el milimetro en las dobles diferencias hay que sincronizar los relojes de los receptores con un error menor que un microsegundo. Esto obliga a disponer de unas coordenadas aproximadas adecuadas, de unas efemérides razonablemente precisas y de las observaciones de pseudodistancias.

Debe tenerse muy presente que el multirrecorrido, que depende de la configuración geométrica en cada momento del satélite, el receptor y el reflector que lo origina, no se cancela con las dobles diferencias.

2.4 Las ambigüedades en la formación de las diferencias.

Tanto en el caso de las diferencias entre satélites como en las diferencias entre receptores los valores enteros de las ambigüedades N_j^m, N_j^l, N_m^i, N_j^i pueden seguir apareciendo como incógnitas o formar unas nuevas incógnitas con sus diferencias:

$$N_j^{lm}=N_j^m-N_j^l \qquad N_{jm}^i=N_m^i-N_j^i$$

y en las dobles diferencias:

$$N_{ij}^{lm}=N_{ij}^m-N_{ij}^l=N_j^m-N_i^m-N_j^l+N_i^l$$

Si no se consideran las nuevas incógnitas el problema se complica por el hecho de que las diferencias dobles están correladas.

2.5 Triples diferencias

En tanto permanezcan constantes las ambigüedades, si restamos las dobles diferencias en dos épocas distintas este término desaparecerá, (prescindimos de los términos atmosféricos y de ruido en las expresiones siguientes).

$$\Phi_{ij}^{lm}(t_2) = \frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m(T_{2j}) - \rho_i^m(T_{2i}) - \rho_j^l(T_{2j}) + \rho_i^l(T_{2i})\right) + N_{ij}^{lm}$$

$$\Phi_{ij}^{lm}(t_1) = \frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m(T_{1j}) - \rho_i^m(T_{1i}) - \rho_j^l(T_{1j}) + \rho_i^l(T_{1i})\right) + N_{ij}^{lm}$$

$$\Delta\Phi_{ij}^{lm} = \Phi_{ij}^{lm}(t_2) - \Phi_{ij}^{lm}(t_1)$$

El nuevo observable se denomina triple diferencia. Si efectuamos un cálculo con triples diferencias se han eliminado tanto las ambigüedades como los saltos de ciclo que se hayan producido durante la observación. Hay que tener presente la correlación existente tanto entre las dobles como en las triples diferencias.

Teniendo en cuenta que la diferencia de distancias es el producto escalar del vector en la dirección del satélite $\vec{e}$ por el vector $\vec{b}$ de posición relativa entre las dos estaciones, se puede escribir aproximadamente, ya que los vectores en la dirección de cada satélite en los extremos de la línea de base no son estrictamente paralelos,

$$\Delta\Phi_{ij}^{lm} = \frac{1}{\lambda_k}\left(\vec{e}_m(t_2) - \vec{e}_l(t_2) - \vec{e}_m(t_1) + \vec{e}_l(t_1)\right) \bullet \vec{b} + \Delta^3\Phi_{atmos}$$

En una primera aproximación, si se suponen las triples diferencias incorreladas, un cálculo con ellas permite una primera estimación del vector **b. No es totalmente correcto pero si práctico.**

2.6 Correlaciones de las diferencias.

Las diferencias de fase presentan correlaciones matemáticas (además de la físicas que puedan existir) como consecuencia de que proceden de observaciones del mismo satélite o del mismo grupo de satélites (diferencias dobles).

2.6.1 Medidas independientes de fase.

Suponiendo que las medidas de fase (entiendase fase batida en el receptor) siguen una distribución normal de varianza σ^2 y media el valor observado, la matriz varianza-covarianzas, cov(Φ), adopta la forma:

$$\operatorname{cov}(\Phi) = \sigma^2 I$$

donde I es la matriz identidad de orden n y n el número de observaciones. SIEMPRE QUE LAS OBSERVACIONES SEAN INDEPENDIENTES.

2.6.2 Diferencias entre receptores. Diferencias simples.

En el caso de dos diferencias:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{l} \\ \Phi_{ij}^{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_j^l - \Phi_i^l \\ \Phi_j^m - \Phi_i^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j^l \\ \Phi_i^l \\ \Phi_j^m \\ \Phi_i^m \end{bmatrix}$$

Cuando se trata de tres diferencias:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{l1} \\ \Phi_{ij}^{l2} \\ \Phi_{ij}^{l3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_j^{l1} - \Phi_i^{l1} \\ \Phi_j^{l2} - \Phi_i^{l2} \\ \Phi_j^{l3} - \Phi_i^{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j^{l1} \\ \Phi_i^{l1} \\ \Phi_j^{l2} \\ \Phi_i^{l2} \\ \Phi_j^{l3} \\ \Phi_i^{l3} \end{bmatrix}$$

En el caso de h diferencias:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{l1} \\ \Phi_{ij}^{l2} \\ \Phi_{ij}^{l3} \\ \cdots \\ \hline \Phi_{ij}^{l_{h-1}} \\ \Phi_{ij}^{lh} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{j}^{l1} \\ \Phi_{i}^{l1} \\ \Phi_{j}^{l2} \\ \cdots \\ \hline \Phi_{j}^{lh} \\ \Phi_{i}^{lh} \end{bmatrix}$$

La matriz covarianza en el caso general, será:

$$\operatorname{cov}\left(\begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{l1} \\ \Phi_{ij}^{l2} \\ \Phi_{ij}^{l3} \\ \hline \Phi_{ij}^{l_{h-1}} \\ \Phi_{ij}^{lh} \end{bmatrix}\right) = C \begin{bmatrix} \Phi_{j}^{l1} \\ \Phi_{i}^{l1} \\ \Phi_{j}^{l2} \\ \hline \Phi_{j}^{lh} \\ \Phi_{i}^{lh} \end{bmatrix} C^T = \sigma^2 ICC^T = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

Las diferencias entre receptores están incorreladas.

2.6.3 Correlación de las dobles diferencias

$$\begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{lm} \\ \Phi_{ij}^{lp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{m} - \Phi_{ij}^{l} \\ \Phi_{ij}^{p} - \Phi_{ij}^{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{ij}^{l} \\ \Phi_{ij}^{m} \\ \Phi_{ij}^{p} \end{bmatrix} = \text{C[d.simples]}$$

$$\operatorname{cov}(DD) = C\operatorname{cov}(d.simples)C^T = 2\sigma^2 CC^T$$

$$\operatorname{cov}(DD) = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} 2\sigma^2$$

Las diferencias dobles están correladas.

Cuando intervenga en un ajuste la matriz de pesos W, es la inversa de cov(DD). Si nDD es número de dobles diferencias en una época t_0,

Para nDD = 2

$$W = \operatorname{cov}(DD)^{-1} = \frac{1}{2\sigma^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para nDD = 3

$$W = \mathrm{cov}(DD)^{-1} = \frac{1}{2\sigma^2 4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

En el caso general,

$$\mathrm{cov}(DD) = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} nDD-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & nDD-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & nDD-1 \end{bmatrix}$$

La matriz de pesos para la época t_0, $W(t_0)$ es

$$W(t_0) = \frac{1}{2\sigma^2}\frac{1}{(nDD+1)}\begin{bmatrix} nDD & -1 & \dots & -1 \\ -1 & nDD & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & nDD \end{bmatrix}$$

Cuando se forman dobles diferencias en las épocas t_0, t_1, ..., t_n

$$W = \begin{bmatrix} W(t_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W(t_1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W(t_n) \end{bmatrix}$$

El tamaño de cada submatriz coincide con el número de dobles diferencias en cada época y los ceros representan submatrices cuyos elementos son cero.

3. Cálculo del vector posición relativa (linea base) con dobles y triples diferencias.

3.1 Algoritmo de formación de las diferencias.

Si en n_r receptores se observan n_s satélites en n_t épocas, sean $\Phi_j^i(h)$ las correspondientes observaciones de fase, la formación ordenada de las diferencias de manera que sean linealmente independientes puede conseguirse usando el algoritmo siguiente:

1. Ordenación:

   1º Por época
   2º Para cada época por número de receptor
   3º Para cada época y receptor por número de satélite

Resulta:

$$
\begin{array}{l}
\Phi_1^1(1),\Phi_1^2(1),\Phi_1^3(1),......,\Phi_1^{ns}(1),\\
\Phi_2^1(1),\Phi_2^2(1),\Phi_2^3(1),......,\Phi_2^{ns}(1),\\
....\\
\Phi_{nr}^1(1),\Phi_{nr}^2(1),\Phi_{nr}^3(1),......,\Phi_{nr}^{ns}(1),\\
\Phi_1^1(2),\Phi_1^2(2),\Phi_1^3(2),......,\Phi_1^{ns}(2),\\
\Phi_2^1(2),\Phi_2^2(2),\Phi_2^3(2),......,\Phi_2^{ns}(2),\\
....\\
\Phi_{nr}^1(2),\Phi_{nr}^2(2),\Phi_{nr}^3(2),......,\Phi_{nr}^{ns}(2),\\
....\\
....\\
\Phi_1^1(nt),\Phi_1^2(nt),\Phi_1^3(nt),......,\Phi_1^{ns}(nt),\\
\Phi_2^1(nt),\Phi_2^2(nt),\Phi_2^3(nt),......,\Phi_2^{ns}(nt),\\
....\\
\Phi_{nr}^1(nt),\Phi_{nr}^2(nt),\Phi_{nr}^3(nt),......,\Phi_{nr}^{ns}(nt),
\end{array}
$$

Para formar un conjunto de (ns-1)(nr-1) dobles diferencias independientes, se establece como base un receptor y un satélite, ambos son el origen de todas las diferencias. La elección del satélite se hace teniendo en cuenta el tiempo que está sobre el horizonte y la altura que alcanza durante el período de observación. Si elegimos el satélite 1 y el receptor 1 del conjunto anterior, resultarán las dobles diferencias:

$$\Phi_{12}^{12}(1),\Phi_{12}^{13}(1),\Phi_{12}^{14}(1),......,\Phi_{12}^{1ns}(1),$$
$$\Phi_{13}^{12}(1),\Phi_{13}^{13}(1),\Phi_{13}^{14}(1),......,\Phi_{13}^{1ns}(1),$$
$$..$$
$$\Phi_{1nr}^{12}(1),\Phi_{1nr}^{13}(1),\Phi_{1nr}^{14}(1),......,\Phi_{1nr}^{1ns}(1),$$
$$\Phi_{12}^{12}(2),\Phi_{12}^{13}(2),\Phi_{12}^{14}(2),......,\Phi_{12}^{1ns}(2),$$
$$\Phi_{13}^{12}(2),\Phi_{13}^{13}(2),\Phi_{13}^{14}(2),......,\Phi_{13}^{1ns}(2),$$
$$..$$
$$\Phi_{12}^{12}(nt),\Phi_{12}^{13}(nt),\Phi_{12}^{14}(nt),......,\Phi_{12}^{1ns}(nt),$$
$$..$$

Hay que contemplar en el esquema alterior la falta de algunas observaciones de la fase batida en el receptor como consecuencia de una pérdida irreparable de ciclos, que el satélite tenga una altura sobre el horizonte inferior a la establecida como mínima (altura de corte), etc.

3.2 Formación de las relaciones de observación.

Distancias cortas:

$$\Phi_{ij}^{lm}(t)=\frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m(t)-\rho_i^m(t)-\rho_j^l(t)+\rho_i^l(t)\right)+N_{ij}^{lm}+\varepsilon(t)$$

donde $N_{ij}^{lm}=N_{ij}^{m}-N_{ij}^{l}$, $N_{ij}^{l}=N_{j}^{l}-N_{i}^{l}$, $N_{ij}^{m}=N_{j}^{m}-N_{i}^{m}$

son las ambigüedades enteras y $\varepsilon(t)$ el ruido (variable estocástica) de la doble diferencia. Al tratarse de distancias cortas se supone que los términos atmosféricos (troposfera e ionosfera) se cancelan. El objetivo es la estimación del vector $\vec{b}=\vec{r}_j-\vec{r}_i$, siendo $\vec{r}_j$ el vector de posición de la estación j y $\vec{r}_i$ el de la estación i. Estos vectores tienen que estar en el mismo sistema de referencia que los de posición de los satélites $\vec{r}^{\,m}$ y $\vec{r}^{\,l}$. (Atención cuando se utilizan efemérides precisas).

$$\vec{r}_j=(X_j,Y_j,Z_j) \qquad \vec{r}_i=(X_i,Y_i,Z_i)$$

$$\vec{r}^{\,m}=(X^m,Y^m,Z^m) \qquad \vec{r}^{\,l}=(X^l,Y^l,Z^l)$$

$$\rho_j^m(t) = \sqrt{\left(X^m - X_j\right)^2 + \left(Y^m - Y_j\right)^2 + \left(Z^m - Z_j\right)^2}$$

$$\rho_i^m(t) = \sqrt{\left(X^m - X_i\right)^2 + \left(Y^m - Y_i\right)^2 + \left(Z^m - Z_i\right)^2}$$

$$\rho_j^l(t) = \sqrt{\left(X^l - X_j\right)^2 + \left(Y^l - Y_j\right)^2 + \left(Z^l - Z_j\right)^2}$$

$$\rho_i^l(t) = \sqrt{\left(X^l - X_i\right)^2 + \left(Y^l - Y_i\right)^2 + \left(Z^l - Z_i\right)^2}$$

Si el vector $\vec{r}_i$ se considera fijo las incógnitas que figuran en esta relación de observación son $\left(X_j, Y_j, Z_j, N_{ij}^{lm}\right)$. Las incógnitas del problema general son $\left(X_j, Y_j, Z_j, N_{ij}^{lm}, \ldots\ldots\right)$ tres de posición y una por cada doble diferencia en una época determinada.

Se trata de un problema de ajuste mínimo cuadrático no lineal en las incógnitas de posición y lineal en las ambigüedades. Se necesita un valor aproximado de las incógnitas de posición $\left(X_{0j}, Y_{0j}, Z_{0j}\right)$

$$X_j = X_{0j} + dX \qquad Y_j = Y_{0j} + dY \qquad Z_j = Z_{0j} + dZ$$

Las relaciones de observación linealizadas son:

$$\Phi_{ij}^{lm} = F_0 + \frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial X_j} dX + \frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial Y_j} dY + \frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial Z_j} dZ + N_{ij}^{lm} + \varepsilon$$

$$F_0 = \frac{1}{\lambda_k}\left(\rho_j^m - \rho_{i\ 0}^m - \rho_j^l + \rho_{i\,0}^l\right)$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial X_j} = \frac{1}{\lambda_k}\left[-\frac{\left(X^m - X_{0j}\right)}{\rho_j^m} - \frac{\left(X^l - X_{0j}\right)}{\rho_i^l}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial Y_j} = \frac{1}{\lambda_k}\left[-\frac{\left(Y^m - Y_{0j}\right)}{\rho_j^m} - \frac{\left(Y^l - Y_{0j}\right)}{\rho_i^l}\right]$$

$$\frac{\partial \Phi_{ij}^{lm}}{\partial Z_j} = \frac{1}{\lambda_k}\left[-\frac{\left(Z^m - Z_{0j}\right)}{\rho_j^m} - \frac{\left(Z^l - Z_{0j}\right)}{\rho_i^l}\right]$$

4. Observaciones con dos frecuencias.

4.1 Simplificación de la notación.

La fase batida en L1 :

$$\Phi_{bj}^{i}(T_j)(L1) = N_j^i(L1) + (f_1/c)\rho_j^i(T_j) + f_1\left(\delta r(T_j) - \delta^i(T_j)\right) + \Phi_{tropo}(L1) - f_1/c \; dion(L1)$$

se puede simplificar escribiendo:

$\Phi_j^i(T_j)(L1) = \Phi(L1)$ $\qquad$ $\rho_j^i(T_j) = \rho$

$\delta_r(T_j) - \delta^i(T_j) = \Delta\delta$ $\qquad$ Combinación de los errores de los osciladores.

dion(L1) Retardo ionosférico en metros para L1.

$$\Phi(L1) = N_j^i(L1) + (f_1/c)\rho + f_1\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L1) - f_1/c \; dion(L1)$$

Análogamente para L2

$$\Phi(L2) = N_j^i(L2) + (f_2/c)\rho + f_2\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L2) - f_2/c \; dion(L2)$$

Siendo $N_j^i(L1) \neq N_j^i(L2)$

4.2 Combinación libre de ionosfera. L3

Es posible una combinación lineal de los observables de fase en cada frecuencia de manera que se elimine la influencia de la ionosfera. Esta es la causa de la utilización de dos frecuencias en el sistema GPS.

El nuevo observable se denomina fase libre de ionosfera $\Phi(L3)$

$$\Phi(L3) = \alpha_1 \Phi(L1) + \alpha_2 \Phi(L2)$$

De las relaciones:

$$f_1\Phi(L1) = \frac{f_1^2}{c}\rho + f_1^2\Delta\delta + f_1 N_j^i(L1) + f_1\Phi_{trop}(L1) - \frac{f_1^2}{c}dion(L1)$$

$$f_2\Phi(L2) = \frac{f_{21}^2}{c}\rho + f_2^2\Delta\delta + f_2 N_j^i(L2) + f_2\Phi_{trop}(L2) - \frac{f_2^2}{c}dion(L2)$$

Resulta:

$$f_1\Phi(L1) - f_2\Phi(L2) = \left(f_1^2 - f_2^2\right)\frac{\rho}{c} + \left(f_1^2 - f_2^2\right)\Delta\delta + f_1 N_j^i(L1) - f_2 N_j^i(L2) + f_1\Phi_{trop}(L1)$$
$$- f_2\Phi_{trop}(L2) - \frac{1}{c}\left(f_1^2 dion(L1) - f_2^2 dion(L2)\right)$$

Como $f_1^2 dion(L1) = f_2^2 dion(L2)$

$$\frac{f_1\Phi(L1) - f_2\Phi(L2)}{f_1^2 - f_2^2} = \frac{1}{c}\rho + \Delta\delta + \frac{f_1 N_j^i(L1) - f_2 N_j^i(L2)}{f_1^2 - f_2^2} + \frac{f_1\Phi_{trop}(L1) - f_2\Phi_{trop}(L2)}{f_1^2 - f_2^2}$$

En esta expresión aparecen ciclos de L1 y ciclos de L2. Cada uno de ellos se refieren a longitudes de onda diferentes. Para escalarla, multiplicamos por f_1

$$\frac{f_1^2\Phi(L1) - f_1 f_2\Phi(L2)}{f_1^2 - f_2^2} = \frac{f_1}{c}\rho + f_1\Delta\delta + \frac{f_1^2 N_j^i(L1) - f_1 f_2 N_j^i(L2)}{f_1^2 - f_2^2} + \frac{f_1^2\Phi_{trop}(L1) - f_1 f_2\Phi_{trop}(L2)}{f_1^2 - f_2^2}$$

Llamando

$$\alpha_1 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \qquad \alpha_2 = -\frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2}$$

$$\Phi(L3) = \alpha_1\Phi(L1) + \alpha_2\Phi(L2) = \frac{f_1}{c}\rho + f_1\Delta\delta + \alpha_1 N_j^i(L1) + \alpha_2 N_j^i(L2) + \alpha_1\Phi_{trop}(L1) + \alpha_2\Phi_{trop}(L2)$$

Los valores de $\alpha_1 = 2.546$ y $\alpha_2 = -1.984$ dan la formula final

$$\Phi(L3) = 2.546\,\Phi(L1) - 1.984\,\Phi(L2)$$

expresada en ciclos de L1.

Si la expresamos en ciclos de L2, bastará multiplicar por f_2

$$\Phi(L3) = \beta_1\Phi(L1) + \beta_2\Phi(L2)$$

$$\beta_1 = -\frac{f_1 f_2}{f_1^2 - f_2^2} \qquad \beta_2 = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

Si llamamos $N_j^i(L3) = \alpha_1 N_j^i(L1) + \alpha_2 N_j^i(L2)$ en ciclos de L1

$N_j^i(L3) = \beta_1 N_j^i(L1) + \beta_2 N_j^i(L2)$ en ciclos de L2

La nueva ambigüedad $N_j^i(L3)$ NO ES UN NUMERO ENTERO.

Si formamos las dobles diferencias con L3 se cancelarán los errores de los relojes y los troposféricos en la medida que estos últimos puedan considerarse iguales.

4.3 Combinación libre de geometría. L4

Si expresamos

$$\Phi(L1) = N_j^i(L1) + (f_1/c)\rho + f_1\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L1) - f_1/c\; dion(L1)$$

$$\Phi(L2) = N_j^i(L2) + (f_2/c)\rho + f_2\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L2) - f_2/c\; dion(L2)$$

en unidades métricas:

$$\phi(L1) = \Phi(L1)\lambda_1 \qquad \phi(L2) = \Phi(L2)\lambda_2 \qquad \lambda_1 = \frac{c}{f_1} \qquad \lambda_2 = \frac{c}{f_2}$$

$$\phi(L1) = \lambda_1 N_j^i(L1) + \rho + c\Delta\delta + \lambda_1\Phi_{tropo}(L1) - dion(L1)$$

$$\phi(L2) = \lambda_2 N_j^i(L2) + \rho + c\Delta\delta + \lambda_2\Phi_{tropo}(L2) - dion(L2)$$

Si llamamos $\phi(L4)$ a la diferencia de las dos anteriores,

$$\phi(L4) = \phi(L1) - \phi(L2) = \lambda_1 N_j^i(L1) - \lambda_2 N_j^i(L2) - dion(L1) + dion(L2)$$

suponemos que los valores de corrección troposférica son sensiblemente iguales. Usando la relación $f_1^2 dion(L1) = f_2^2 dion(L2)$, se obtiene

$$\phi(L4) = \phi(L1) - \phi(L2) = \lambda_1 N_j^i(L1) - \lambda_2 N_j^i(L2) + 0.646 dion(L1)$$

En la expresión anterior no figura la distancia receptor satélite, esta combinación se denomina libre de geometría. Siempre que las ambigüedades permanezcan constantes, la variación del observable se corresponderá con la variación temporal de *dion(L1)*, como esta última lo hace de un modo suave, cualquier salto brusco en L4 se debe necesariamente a cambio de una de las ambigüedades. El estudio de la variación de L4 permitirá detectar la existencia de un salto de ciclo en L1 ó L2.

4.4 Banda ancha. (WIDE LANE) L5

Si restamos

$$\Phi(L1) = N_j^i(L1) + (f_1/c)\rho + f_1\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L1) - f_1/c\ dion(L1) \text{ (ciclos)}$$

$$\Phi(L2) = N_j^i(L2) + (f_2/c)\rho + f_2\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L2) - f_2/c\ dion(L2) \text{ (ciclos)}$$

$$\Phi(L5) = \Phi(L1) - \Phi(L2) = N_j^i(L1) - N_j^i(L2) + \frac{f_1 - f_2}{c}\rho + (f_1 - f_2)\Delta\delta + \Phi_{tropo}(L1) - \Phi_{tropo}(L2) -$$
$$\frac{1}{c}(f_1 dion(L1) - f_2 dion(L2)) + \Phi_{ruido}$$

La influencia de la propagación en la atmosfera se atenua sensiblemente y el ruido aumenta. L5 tendrá como frecuencia $f_1 – f_2$, a la que corresponde una longitud de onda

$$\lambda_5 = \frac{c}{f_1 - f_2} \cong 0.86 metros$$

La ambigüedad

$$N_j^i(L5) = N_j^i(L1) - N_j^i(L2)$$

sigue siendo un número entero.

4.5 Banda estrecha. (NARROW LANE) L6

Si sumamos las dos fórmulas anteriores

$$\Phi(L6)=\Phi(L1)+\Phi(L2)=N_j^i(L1)+N_j^i(L2)+\frac{f_1+f_2}{c}\rho+(f_1+f_2)\Delta\delta+\Phi_{tropo}(L1)+\Phi_{tropo}(L2)-\frac{1}{c}(f_1 dion(L1)+f_2 dion(L2))+\Phi_{ruido}$$

La frecuencia de L6 será f1+f2 y su longitud de onda

$$\lambda_6=\frac{c}{f_1+f_2}\cong 0.10 metros$$

La ambigüedad

$$N_j^i(L6)=N_j^i(L1)+N_j^i(L2)$$